

Разбор 5 задач повышенной сложности • степени

Задание 8 ОГЭ. Печать: 2–3 страницы А4. Интерактивный тренажёр по этим же задачам — в материале 5.

Задача А. Приведение к одному основанию, степень степени, отрицательные показатели

Найдите значение выражения $\frac{8^{-3} \cdot 16^2}{32^{-1} \cdot 4^{-2}}$

Что видим. Дробь, в числителе и знаменателе произведения степеней. Основания 8, 16, 32, 4 разные, но все они — степени числа 2. Показатели отрицательные.

Правило. При возведении степени в степень показатели перемножают: $(a^m)^n = a^{mn}$. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывают, при делении вычитают.

Алгоритм. все основания к числу 2 → числитель → знаменатель → показатель частного → значение степени.

Решение по шагам.

1. $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$, $4 = 2^2$.
2. Числитель: $8^{-3} \cdot 16^2 = (2^3)^{-3} \cdot (2^4)^2 = 2^{-9} \cdot 2^8 = 2^{-1}$.
3. Знаменатель: $32^{-1} \cdot 4^{-2} = (2^5)^{-1} \cdot (2^2)^{-2} = 2^{-5} \cdot 2^{-4} = 2^{-9}$.
4. Частное: $2^{-1} : 2^{-9} = 2^{-1-(-9)} = 2^8 = 256$.

Ответ: 256.

Проверка. Числитель: $8^{-3} = \frac{1}{512}$, $16^2 = 256$, произведение $\frac{256}{512} = \frac{1}{2}$. Знаменатель: $\frac{1}{32} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{512}$. Частное: $\frac{1}{2} : \frac{1}{512} = 256$.

Ловушка. Вычитание отрицательного показателя: $-1 - (-9) = 8$, а не -10 . Ещё одна частая ошибка — перемножить показатели при умножении степеней.

Задача В. Разные основания: разложение на простые множители

Найдите значение выражения $\frac{12^4 \cdot 6^{-3}}{2^3 \cdot 3}$

Что видим. Основания 12 и 6 нельзя свести к одному числу, но оба разлагаются на простые множители 2 и 3. В знаменателе тоже 2 и 3.

Правило. Степень произведения равна произведению степеней: $(ab)^n = a^n b^n$. Показатели складывают только у степеней с одинаковым основанием.

Алгоритм. разложить основания на простые множители → собрать показатели двойки и тройки отдельно → разделить → вычислить.

Решение по шагам.

1. $12 = 2^2 \cdot 3$, значит $12^4 = (2^2 \cdot 3)^4 = 2^8 \cdot 3^4$. $6 = 2 \cdot 3$, значит $6^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3}$.
2. Числитель: $2^8 \cdot 3^4 \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3} = 2^{8-3} \cdot 3^{4-3} = 2^5 \cdot 3$.
3. Знаменатель: $2^3 \cdot 3$.
4. Частное: $(2^5 \cdot 3) : (2^3 \cdot 3) = 2^{5-3} \cdot 3^{1-1} = 2^2 \cdot 3^0 = 4 \cdot 1 = 4$.

Ответ: 4.

Проверка. Числитель: $12^4 = 20736$, $6^{-3} = \frac{1}{216}$, значение $\frac{20736}{216} = 96$. Знаменатель $8 \cdot 3 = 24$. Частное $96 : 24 = 4$.

Ловушка. Нельзя складывать показатели у разных оснований: $12^4 \cdot 6^{-3}$ не равно ни 12^1 , ни 6^1 (значение равно 96). Сначала разложение на простые множители, потом показатели каждого множителя отдельно.

Задача С. Отрицательные основания, отрицательный показатель, порядок действий

Найдите значение выражения $(-2)^{-3} \cdot (-4)^3 - (-3)^2 : 3^2$

Что видим. Отрицательные основания в скобках, один отрицательный показатель, умножение, деление и вычитание. Главная трудность — знаки.

Правило. Степень отрицательного числа с чётным показателем положительна, с нечётным — отрицательна. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Сначала возведение в степень, затем умножение и деление слева направо, затем вычитание.

Алгоритм. каждая степень отдельно (со знаком) $\rightarrow$ умножение и деление $\rightarrow$ вычитание.

Решение по шагам.

- $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -0,125$.
- $(-4)^3 = -64$. Произведение: $-0,125 \cdot (-64) = 8$ (знаки одинаковые, результат положительный).
- $(-3)^2 = 9$; $9 : 3^2 = 9 : 9 = 1$.
- $8 - 1 = 7$.

Ответ: 7.

Проверка. Через степени двойки: $(-4)^3 = -2^6$, $(-2)^{-3} = -2^{-3}$, их произведение $2^3 = 8$. Дальше $8 - 1 = 7$.

Ловушка. $(-3)^2 = 9$, а не -9 : скобки значат, что в квадрат возводят число с минусом. Отрицательный показатель не меняет знак основания: $(-2)^{-3} = -0,125$, а не $0,125$.

Задача D. Корень из степени и степень произведения

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2^6 \cdot 3^4}}{(2^{-1} \cdot 3)^2}$

Что видим. Корень из произведения степеней в числителе и степень произведения в знаменателе.

Правило. Для неотрицательных чисел $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{a^2} = a$. Степень произведения равна произведению степеней: $(ab)^n = a^n b^n$.

Алгоритм. числитель: корень из каждого множителя $\rightarrow$ знаменатель: степень каждого множителя $\rightarrow$ деление.

Решение по шагам.

- $\sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^4} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.
- $(2^{-1} \cdot 3)^2 = 2^{-2} \cdot 3^2 = \frac{9}{4} = 2,25$.
- $72 : \frac{9}{4} = 72 \cdot \frac{4}{9} = 32$.

Ответ: 32.

Проверка. Числитель: $\sqrt{64 \cdot 81} = \sqrt{5184} = 72$, так как $72^2 = 5184$. Знаменатель: $(\frac{3}{2})^2 = 2,25$. Частное $72 : 2,25 = 32$.

Ловушка. Корень делит показатель пополам: $\sqrt{2^6} = 2^3$, а не 2^{12} и не 2^6 . В степень возводят каждый множитель: $(2^{-1} \cdot 3)^2 = 2^{-2} \cdot 3^2$, а не $2^{-1} \cdot 3^2$.

Задача Е. Стандартный вид числа и степени десяти

Найдите значение выражения $\frac{3,6 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^2}$

Что видим. Числа в стандартном виде: десятичные множители и степени десяти с разными показателями.

Правило. При умножении степеней с одинаковым основанием показатели складывают, при делении вычитают. Десятичные множители и степени десяти считают отдельно.

Алгоритм. числитель: множители отдельно, степени десяти отдельно → знаменатель → сократить степени десяти → разделить множители.

Решение по шагам.

1. Числитель: $3,6 \cdot 5 = 18$; $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^2$. Значит числитель равен $18 \cdot 10^2$.

2. Знаменатель: $1,2 \cdot 10^2$.

3. $\frac{18 \cdot 10^2}{1,2 \cdot 10^2} = \frac{18}{1,2} = \frac{180}{12} = 15$ (степени десяти сократились).

Ответ: 15.

Проверка. Без степеней: $3,6 \cdot 10^5 = 360000$, $5 \cdot 10^{-3} = 0,005$, произведение 1800. Знаменатель $1,2 \cdot 10^2 = 120$. $1800 : 120 = 15$.

Ловушка. $10^5 \cdot 10^{-3} = 10^2$ (показатели складывают), а не 10^{-15} и не 10^8 . При делении $18 : 1,2$ переносите запятую в обоих числах: $180 : 12$.