

Корни: теория и устный опрос

Задание 8 ОГЭ, часть 1. Печать: 2 страницы А4. Определения и свойства даны в формулировках школьного учебника.

Теория

1. Квадратный корень. Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a . Обозначают $\sqrt{a}$, где $a \geq 0$; число a называют подкоренным выражением. $\sqrt{49} = 7$, так как $7 \geq 0$ и $7^2 = 49$. Корень из отрицательного числа не существует. $\sqrt{0} = 0$. При $a \geq 0$ верно $(\sqrt{a})^2 = a$. Для любого числа a верно $\sqrt{a^2} = |a|$: $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$, а не -7 . Арифметический корень никогда не бывает отрицательным.

2. Квадраты, которые надо знать. $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$, $17^2 = 289$, $18^2 = 324$, $19^2 = 361$, $20^2 = 400$, $25^2 = 625$. Десятичные: $0,1^2 = 0,01$; $0,2^2 = 0,04$; $0,3^2 = 0,09$; $0,5^2 = 0,25$; $1,1^2 = 1,21$; $1,2^2 = 1,44$; $1,3^2 = 1,69$; $1,5^2 = 2,25$. Если после запятой под корнем 2 знака, то в ответе 1 знак; если 4 знака, то 2: $\sqrt{0,0049} = 0,07$.

3. Свойства арифметического квадратного корня. Для $a \geq 0$ и $b \geq 0$ верно $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$: корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей. Для $a \geq 0$ и $b > 0$ верно $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$: корень из дроби равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя.

Читая справа налево, эти равенства позволяют перемножать и делить корни: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}$. Примеры: $\sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$; $\sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{324} = 18$; $\sqrt{72} : \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$; $\sqrt{0,36 \cdot 49} = 0,6 \cdot 7 = 4,2$. **Корень из суммы не равен сумме корней:** $\sqrt{9 + 16} = 5$, а $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

4. Вынесение множителя из-под знака корня. При $a \geq 0$ и $b \geq 0$ верно $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$. Чтобы вынести множитель, подкоренное число раскладывают на множитель, являющийся точным квадратом, и остаток: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$. Обратное действие, внесение множителя под знак корня: $3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$. Корни с одинаковым подкоренным выражением называют подобными, их складывают и вычитают как подобные слагаемые: $m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$. Поэтому $\sqrt{75} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Складывать и вычитать подкоренные числа нельзя: $\sqrt{75} - \sqrt{12}$ не равно $\sqrt{63}$.

5. Произведение и степень корней. По определению $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$. Отсюда $m\sqrt{a} \cdot n\sqrt{a} = mn \cdot a$ и $(m\sqrt{a})^2 = m^2 a$. Примеры: $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 15 \cdot 2 = 30$; $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$; $6\sqrt{3} : \sqrt{3} = 6$.

6. Формулы сокращённого умножения с корнями. Разность квадратов: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Квадрат суммы и квадрат разности: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Примеры: $(\sqrt{11} + 2\sqrt{7})(\sqrt{11} - 2\sqrt{7}) = 11 - 4 \cdot 7 = -17$; $(\sqrt{7} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = 11 - 4\sqrt{7}$. Квадрат разности не равен разности квадратов: $(\sqrt{7} - 2)^2$ не равно $7 - 4$.

7. Корень из произведения степеней. При $a \geq 0$ верно $\sqrt{a^{2n}} = a^n$: показатель под корнем делят на 2. Если под корнем произведение степеней, то извлекают корень из каждого множителя: $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$. Если основание не является квадратом, число раскладывают на простые множители: $\sqrt{1800} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2}$.

8. Порядок действий и запись ответа. Сначала выполняют действия в скобках, затем возведение в степень и извлечение корня, умножение и деление, в последнюю очередь сложение и вычитание. Значение выражения в задании 8 — целое число или конечная десятичная дробь; корень в ответе не остаётся. Если в конце остался знак корня, вернитесь и проверьте решение. Ответ записывают в бланк №1 числом с запятой: 7,5; -17 .

Вопросы для устного опроса

1. Что называют арифметическим квадратным корнем из числа a ? Чему равны $\sqrt{169}$ и $\sqrt{0,81}$?
2. Чему равны $(\sqrt{13})^2$ и $\sqrt{(-5)^2}$? Почему второй результат не равен -5 ?
3. Как извлечь корень из произведения? Чему равен $\sqrt{36 \cdot 49}$?
4. Как перемножить корни? Чему равно $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$?
5. Как разделить корни? Чему равно $\sqrt{72} : \sqrt{2}$?
6. Верно ли, что $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$? Проверьте.
7. Вынесите множитель из-под знака корня: $\sqrt{75}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{72}$.
8. Чему равна разность $\sqrt{75} - \sqrt{12}$? Почему нельзя вычесть $75 - 12$?
9. Чему равно $(3\sqrt{2})^2$? Что возводится в квадрат?
10. Запишите формулу разности квадратов. Чему равно $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$?
1. Раскройте скобки: $(\sqrt{7} - 2)^2$. Какие слагаемые получаются?
2. Как извлечь корень из степеней? Чему равны $\sqrt{2^6}$ и $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$?
3. Чему равны $\sqrt{1,44}$, $\sqrt{0,0049}$, $\sqrt{0,25}$? Как определить, сколько знаков после запятой в ответе?
4. Чему равны $\sqrt{(-7)^2}$ и $(-\sqrt{7})^2$? Чем отличаются эти записи?

Ответы на вопросы (для учителя).

1. Неотрицательное число, квадрат которого равен
а. $\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{0,81} = 0,9$.
2. $(\sqrt{13})^2 = 13$; $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$, так как $\sqrt{a^2} = |a|$
и арифметический корень неотрицателен.
3. Равен произведению корней: $\sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$.
4. Перемножить подкоренные числа: $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{324} = 18$.
5. Разделить подкоренные числа: $\sqrt{72} : \sqrt{2} = \sqrt{36} = 6$.
6. Нет: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, а $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.
7. $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
8. $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Корни сначала приводят к
виду с одинаковым подкоренным числом.
9. $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$. В квадрат возводят и
коэффициент 3, и корень.
10. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = 7 - 3 = 4$.
11. $(\sqrt{7} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = 11 - 4\sqrt{7}$.
12. Показатель делят на 2: $\sqrt{2^6} = 2^3 = 8$; $\sqrt{3^4 \cdot 5^2} = 9 \cdot 5 = 45$.
13. $\sqrt{1,44} = 1,2$; $\sqrt{0,0049} = 0,07$; $\sqrt{0,25} = 0,5$. В
ответе вдвое меньше знаков после запятой, чем
под корнем.
14. $\sqrt{(-7)^2} = 7$; $(-\sqrt{7})^2 = 7$ (минус в скобках, квадрат
положителен). Но $-\sqrt{49} = -7$: минус остался
перед корнем.

Оценка: 1 балл за каждое из 5 заданий (в заданиях 1 и 2 — за обе верные части). «5» — 5 баллов; «4» — 4; «3» — 3; меньше трёх — повторить теорию. Пороги — предложение.

Разбор 5 задач повышенной сложности · корни

Задание 8 ОГЭ. Печать: 2–3 страницы А4. Интерактивный тренажёр по этим же задачам — в материале 5.

Задача А. Вынесение множителя из-под знака корня, подобные слагаемые

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{75} - \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

Что видим. Дробь: в числителе разность двух корней, в знаменателе корень. Подкоренные числа разные (75, 12, 3), но $75 = 25 \cdot 3$ и $12 = 4 \cdot 3$, то есть под корнем можно получить множитель 3.

Правило. Вынесение множителя: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ при $a \geq 0, b \geq 0$. Подобные корни складывают и вычитают как подобные слагаемые: $m\sqrt{b} \pm n\sqrt{b} = (m \pm n)\sqrt{b}$.

Алгоритм. вынести множитель из каждого корня → привести подобные → разделить на $\sqrt{3}$

Решение по шагам.

- $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.
- Разность: $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (5 - 2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.
- Деление: $3\sqrt{3} : \sqrt{3} = 3$.

Ответ: 3.

Проверка. $\sqrt{75} \approx 8,660$; $\sqrt{12} \approx 3,464$; разность $\approx 5,196$; $\sqrt{3} \approx 1,732$; $5,196 : 1,732 = 3,000$.

Ловушка. Нельзя вычесть подкоренные числа: $\sqrt{75} - \sqrt{12}$ не равно $\sqrt{63}$. Также частая ошибка — записать $\sqrt{75} = 25\sqrt{3}$ (в коэффициент нужно взять $\sqrt{25} = 5$).

Задача В. Разность квадратов с корнями

Найдите значение выражения $(\sqrt{11} + 2\sqrt{7})(\sqrt{11} - 2\sqrt{7})$

Что видим. Произведение суммы и разности одних и тех же выражений $\sqrt{11}$ и $2\sqrt{7}$.

Правило. Разность квадратов: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Квадрат корня: $(\sqrt{a})^2 = a$; квадрат произведения: $(mb)^2 = m^2b^2$.

Алгоритм. найти a^2 → найти b^2 → вычесть

Решение по шагам.

- $a = \sqrt{11}$, $b = 2\sqrt{7}$; $a^2 = 11$.
- $b^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{7})^2 = 4 \cdot 7 = 28$.
- $a^2 - b^2 = 11 - 28 = -17$.

Ответ: -17.

Проверка. $\sqrt{11} \approx 3,3166$; $2\sqrt{7} \approx 5,2915$; сумма $\approx 8,6081$; разность $\approx -1,9749$; произведение $\approx -17,00$.

Ловушка. $(2\sqrt{7})^2 = 28$, а не 14 и не $4\sqrt{7}$. Ответ получается отрицательным: $11 - 28 = -17$.

Задача С. Квадрат разности и сокращение слагаемых с корнем

Найдите значение выражения $(\sqrt{7} - 2)^2 + 4\sqrt{7}$

Что видим. Квадрат разности с корнем и слагаемое $4\sqrt{7}$. Ответ должен быть числом, значит слагаемые с $\sqrt{7}$ сократятся.

Правило. Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Алгоритм. раскрыть квадрат → привести подобные

Решение по шагам.

- $a = \sqrt{7}$, $b = 2$. $a^2 = 7$; $2ab = 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2 = 4\sqrt{7}$; $b^2 = 4$.
- $(\sqrt{7} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = 11 - 4\sqrt{7}$.
- $11 - 4\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 11$.

Ответ: 11.

Проверка. $\sqrt{7} \approx 2,6458$; $\sqrt{7} - 2 \approx 0,6458$; квадрат $\approx 0,4170$; $4\sqrt{7} \approx 10,583$; сумма $\approx 11,000$.

Ловушка. $(\sqrt{7} - 2)^2$ не равно $7 - 4$: потерять удвоенное произведение $2ab$ — самая частая ошибка.

Задача D. Корень из произведения степеней

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2}}{12}$

Что видим. Корень из произведения степеней, затем деление на 12. Все показатели под корнем чётные.

Правило. При $a \geq 0$ верно $\sqrt{a^{2n}} = a^n$, потому что $(a^n)^2 = a^{2n}$. Корень из произведения равен произведению корней.

Алгоритм. корень из каждого множителя $\rightarrow$ перемножить $\rightarrow$ разделить на 12

Решение по шагам.

1. $\sqrt{2^6} = 2^3 = 8$; $\sqrt{3^4} = 3^2 = 9$; $\sqrt{5^2} = 5$.

2. $8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$.

3. $360 : 12 = 30$.

Ответ: 30.

Проверка. $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 64 \cdot 81 \cdot 25 = 129600$. $360^2 = 129600$, поэтому корень равен 360, а $360 : 12 = 30$.

Ловушка. Показатель делят на 2: $\sqrt{2^6} = 2^3 = 8$. Ошибки: оставить показатель (2^6), вычесть из него 2 или извлечь корень из основания.

Задача E. Корни из десятичных дробей

Найдите значение выражения $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{40} - \sqrt{0,01 \cdot 25}$

Что видим. Корни из десятичных дробей. Первое произведение корней удобно записать под одним корнем.

Правило. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$. Корень из десятичной дроби: после запятой в ответе вдвое меньше знаков, чем под корнем.

Алгоритм. первое слагаемое под одним корнем $\rightarrow$ второе слагаемое $\rightarrow$ вычесть

Решение по шагам.

1. $\sqrt{1,6} \cdot \sqrt{40} = \sqrt{1,6 \cdot 40} = \sqrt{64} = 8$.

2. $\sqrt{0,01 \cdot 25} = \sqrt{0,25} = 0,5$ ($0,5^2 = 0,25$).

3. $8 - 0,5 = 7,5$.

Ответ: 7,5.

Проверка. $\sqrt{1,6} \approx 1,2649$; $\sqrt{40} \approx 6,3246$; произведение $\approx 8,000$; $8 - 0,5 = 7,5$.

Ловушка. $\sqrt{0,01} = 0,1$, а не 0,01 и не 0,001. Запятую переносят на вдвое меньше знаков: 0,25 под корнем даёт 0,5.

Памятка: корни (задание 8)

Один лист А4. Алгоритм, свойства и запись ответа, чтобы не потерять баллы.

Алгоритм решения задания 8 с корнями

- 1. Прочитай и разметь. Найди корни, скобки, минусы, дробные черты, десятичные дроби, степени под корнем.
- 2. Выбери приём. Под корнем произведение или степени → корень из каждого множителя. Разные корни с «общим» множителем ($\sqrt{75}, \sqrt{12}$) → вынести множитель: $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Скобки с корнями → формулы: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Десятичные дроби → корни под одним корнем, запятая вдвое меньше знаков.
- 3. Преобразуй. Записывая каждое действие отдельной строкой. Квадрат корня: $(\sqrt{a})^2 = a$, $(m\sqrt{a})^2 = m^2a$.
- 4. Приведи подобные. Слагаемые с одинаковым корнем складывай и вычитай по коэффициентам: $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Слагаемые вида $+4\sqrt{7}$ и $-4\sqrt{7}$ сокращаются.
- 5. Вычисли. Порядок действий: скобки, степень и корень, умножение и деление, сложение и вычитание.
- 6. Проверь. Знак ответа; ответ — целое число или конечная десятичная дробь; приближённая проверка: $\sqrt{2} \approx 1,41$; $\sqrt{3} \approx 1,73$; $\sqrt{5} \approx 2,24$; $\sqrt{7} \approx 2,65$.

Свойства и формулы

Свойство	Пример
$(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geq 0$; $\sqrt{a^2} = a $	$(\sqrt{13})^2 = 13$; $\sqrt{(-7)^2} = 7$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$
$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$	$\sqrt{72 : 2} = \sqrt{36} = 6$
$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$	$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
$m\sqrt{a} \pm n\sqrt{a} = (m \pm n)\sqrt{a}$	$5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
$(m\sqrt{a})^2 = m^2a$	$(3\sqrt{2})^2 = 18$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) = 4$
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(\sqrt{7} - 2)^2 = 11 - 4\sqrt{7}$
$\sqrt{a^{2n}} = a^n$	$\sqrt{2^6 \cdot 3^4} = 8 \cdot 9 = 72$

Квадраты, которые надо знать

$11^2 = 121, 12^2 = 144, 13^2 = 169, 14^2 = 196, 15^2 = 225, 16^2 = 256, 17^2 = 289, 18^2 = 324, 19^2 = 361, 20^2 = 400, 25^2 = 625. 0,2^2 = 0,04; 0,5^2 = 0,25; 1,2^2 = 1,44; 1,3^2 = 1,69; 1,5^2 = 2,25.$

Как записать ответ в бланк №1

- Задание 8 относится к части 1: проверяется только ответ. Ход решения эксперты не смотрят и баллов за него не дают. Решение пиши в черновике или на полях КИМ, на бланк его переносить не нужно.
- Ответ — целое число или конечная десятичная дробь. Десятичная запятая, не точка: 7,5 (не 7.5).
- Без единиц измерения, без знака «=», без слов, без знака корня и без дробной черты. Получилось $\frac{15}{2}$ — пиши 7,5. Получилось $\sqrt{49}$ — пиши 7.
- Минус пиши, если число отрицательное: −17. Каждую цифру, запятую и минус — в отдельную клетку по образцу на бланке.
- Пиши в простейшем виде: 4, а не 4,0 и не 04. Исправляй ответ по правилам бланка, аккуратно и разборчиво.
- Переписывая ответ с черновика, сверь знак и запятую: баллы чаще всего теряют именно здесь.

Если корни встретятся в части 2

В заданиях части 2 (уравнения, неравенства, текстовые задачи) ответ без решения не засчитывают. Пиши по порядку: условие или уравнение; преобразования по шагам, каждое на новой строке (например, $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$); промежуточные значения; ответ. Верный ход с одной вычислительной ошибкой обычно оценивают ниже максимума, поэтому после последнего действия пересчитай ещё раз. Точные правила смотри в критериях ФИПИ для своего номера.

Типичные потери

Ошибка	Как правильно
Вычитают подкоренные числа: $\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{63}$	$\sqrt{75} - \sqrt{12} = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
Складывают корни из суммы: $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$	$\sqrt{9 + 16} = 5$, а $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$: корень из суммы не равен сумме корней
$(3\sqrt{5})^2$ считают равным $9\sqrt{5}$ или 15	$(3\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$: в квадрат возводят и коэффициент, и корень
$(\sqrt{7} - 2)^2$ считают равным $7 - 4$	$(\sqrt{7} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4$: нужно удвоенное произведение
$\sqrt{(-7)^2}$ считают равным −7	$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$: арифметический корень не бывает отрицательным
$\sqrt{2^6}$ считают равным $2^3 \cdot 2$ или 2^{12}	$\sqrt{2^6} = 2^3 = 8$: показатель делят на 2
$\sqrt{0,01}$ считают равным 0,01	$\sqrt{0,01} = 0,1$: после запятой вдвое меньше знаков
Оставляют в ответе корень или дробь	Перепроверь решение: ответ — целое число или десятичная дробь, например 7,5

Ответы (для учителя). Уровень 1: 1) 13; 2) 0,9; 3) 6; 4) 10; 5) 15; 6) 7. Уровень 2: 7) 10; 8) 24; 9) 9; 10) 14; 11) 4,2; 12) 6. Уровень 3: 13) -5; 14) 12; 15) 6; 16) 11.

Оценка. 1 балл за верный ответ, всего 16. «5» — 14-16; «4» — 11-13; «3» — 8-10; «2» — меньше 8. Пороги — предложение, не официальная шкала ФИПИ. Слабый ученик решает уровни 1-2, сильный — уровни 2-3. Ошибки в 1-6 — вернуться к правилам 1-3 и 5 теории; в 7-12 — к правилам 3-6; в 13-16 — к правилам 4, 6, 7 (вынесение множителя, формулы, корень из степеней и десятичных дробей).

Ключи. 7) $9 \cdot 2 - 8 = 10$. 8) $\sqrt{576} = 24$. 9) $13 - 4 = 9$. 10) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 14$. 12) $5 + 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} = 6$. 13) $7 - 4 \cdot 3 = -5$. 14) $8 \cdot 3 \cdot 7 = 168$; $168 : 14 = 12$. 15) $12\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$; $6\sqrt{3} : \sqrt{3} = 6$. 16) $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{1} = 1$; $12 - 1 = 11$.

Домашняя карточка · корни (4 задачи)

Задание 8 ОГЭ. Печать: 1 лист А4.

Фамилия, имя: _____ Дата сдачи: _____

Решайте по алгоритму из памятки: записывайте каждое действие. Найдите значение выражения.

$$1. \frac{\sqrt{80} - \sqrt{20}}{\sqrt{5}}$$

Ответ: _____

2. $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})(2\sqrt{3} - \sqrt{5})$

Ответ: _____

3. $\frac{\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 7^2}}{21}$

Ответ: _____

4. $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{0,04 \cdot 49}$

Ответ: _____

Ответы и ключевые точки для проверки (отрезать).

1. **Ответ 2.** $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$; $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$; разность $2\sqrt{5}$; $2\sqrt{5} : \sqrt{5} = 2$. Ловушка: $\sqrt{80} - \sqrt{20}$ не равно $\sqrt{60}$.
2. **Ответ 7.** Разность квадратов: $(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 3 - 5 = 12 - 5 = 7$. Ловушка: $(2\sqrt{3})^2 = 12$, а не 6 и не $4\sqrt{3}$.
3. **Ответ 24.** Показатели делят на 2: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 8 \cdot 9 \cdot 7 = 504$; $504 : 21 = 24$. Ловушка: $\sqrt{2^6} = 8$, а не 2^{12} и не $2^3 \cdot 2$.
4. **Ответ 3,6.** $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{25} = 5$; $\sqrt{0,04 \cdot 49} = 0,2 \cdot 7 = 1,4$; $5 - 1,4 = 3,6$. Ловушка: $\sqrt{0,04} = 0,2$, а не 0,02 и не 0,4.

Корни (задание 8 ОГЭ)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель».

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, часть 1, задание 8: значение выражения с квадратными корнями). Основные задачи А-Е и задачи для переноса.

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. В конце каждой задачи есть задача для самостоятельного решения. Печать: 2 колонки, шрифт 9 pt, экономия бумаги.

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Часть 1. Общий алгоритм (один раз для всех пяти задач)

Учитель: Открой любое задание 8 с корнями. Что мы видим?

Ученик: Числовое выражение с квадратными корнями: корни перемножают, вычитают, возводят в квадрат, иногда под корнем степени или десятичные дроби. Надо найти значение.

Учитель: Что в ответе?

Ученик: Одно число: целое или конечная десятичная дробь. Корня в ответе не остаётся. Если остался, значит я где-то ошибся. В первой части проверяется только ответ, поэтому один неверный знак стоит всего балла.

Учитель: Что такое арифметический квадратный корень?

Ученик: Неотрицательное число, квадрат которого равен подкоренному числу. $\sqrt{49} = 7$, потому что $7 \geq 0$ и $7^2 = 49$. Поэтому $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$, а не -7 : корень не бывает отрицательным. Общее правило: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Учитель: Откуда берётся правило $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$?

Ученик: Возьмём $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Оно неотрицательно, а его квадрат равен $(\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = a \cdot b$. Значит это неотрицательное число, квадрат которого ab , то есть как раз $\sqrt{ab}$. Деление работает так же: $\sqrt{a/b} = \sqrt{a} / \sqrt{b}$.

Учитель: А можно ли так же поступить с суммой: $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$?

Ученик: Нет. $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, а $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Для суммы такого свойства нет, и для разности тоже.

Учитель: Откуда берётся вынесение множителя?

Ученик: Из свойства произведения: $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ при $a \geq 0$. Например, $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. Подкоренное число раскладываю на множитель, который является точным квадратом, и остаток.

Учитель: А формулы сокращённого умножения откуда?

Ученик: Это раскрытие скобок. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$: средние слагаемые уничтожаются. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$. Для корней добавляется одно: $(\sqrt{a})^2 = a$ и $(m\sqrt{a})^2 = m^2a$, в квадрат возводятся и коэффициент, и корень.

Учитель: Зафиксируем алгоритм, он подходит к любому заданию 8 с корнями:

1. Разметь выражение: корни, скобки, знаки, десятичные дроби, степени под корнем, дробная черта.
2. Выбери приём: под корнем произведение или степени → корень из каждого множителя; разные корни с общим «квадратным» множителем → вынести множитель; скобки с корнями → формулы; десятичные дроби → записать произведение под одним корнем, запятая вдвое меньше знаков.

3. Преобразуй по шагам, каждое действие отдельной строкой. Следи за знаками перед скобками.
4. Приведи подобные слагаемые: слагаемые с одинаковым корнем складывай по коэффициентам.
5. Проверь приближённо: $\sqrt{2} \approx 1,41$; $\sqrt{3} \approx 1,73$; $\sqrt{5} \approx 2,24$; $\sqrt{7} \approx 2,65$.
6. Запиши в бланк №1 только число: десятичная запятая, без знака корня и без знака равенства.

Часть 2. Разбор задач А-Е

Задача А. Вынесение множителя из-под знака корня, подобные слагаемые

Условие: найдите значение выражения $(\sqrt{75} - \sqrt{12}) / \sqrt{3}$.

Учитель: Что мы видим в этом выражении?

Ученик: Дробь: в числителе разность двух корней, в знаменателе корень. Подкоренные числа разные: 75, 12 и 3. Но $75 = 25 \cdot 3$, а $12 = 4 \cdot 3$, то есть в каждом числе есть множитель 3.

Учитель: Можно ли сразу вычесть: $\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{63}$?

Ученик: Нельзя. Корень из разности не равен разности корней, как и корень из суммы. Проверим на малых числах: $\sqrt{(25 - 16)} = \sqrt{9} = 3$, а $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 1$.

Учитель: Какое правило нам понадобится и откуда оно?

Ученик: Вынесение множителя: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$, оно следует из свойства корня из произведения. И правило подобных слагаемых: $m\sqrt{3} - n\sqrt{3} = (m - n)\sqrt{3}$, как «5 яблок минус 2 яблока».

Учитель: Составь план.

Ученик: Вынести множитель из каждого корня → привести подобные слагаемые → разделить на $\sqrt{3}$.

Учитель: Почему мы раскладываем именно на $25 \cdot 3$ и $4 \cdot 3$?

Ученик: Потому что в знаменателе $\sqrt{3}$. Нужно, чтобы в числителе тоже был $\sqrt{3}$ и он сократился. 25 и 4 выбираем потому, что это точные квадраты.

Учитель: Выполни первый шаг.

Ученик: $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$. $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$.

Учитель: Дальше.

Ученик: Числитель: $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (5 - 2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Общий множитель $\sqrt{3}$ вынесен за скобку.

Учитель: Теперь деление.

Ученик: $3\sqrt{3} / \sqrt{3} = 3$. $\sqrt{3}$ в числителе и знаменателе сокращается.

Учитель: Запиши цепочку целиком.

Ученик: $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Числитель: $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$. Частное: $3\sqrt{3} / \sqrt{3} = 3$. **Ответ: 3.**

Учитель: Проверь другим способом.

Ученик: $\sqrt{75} \approx 8,660$; $\sqrt{12} \approx 3,464$; разность $\approx 5,196$; $\sqrt{3} \approx 1,732$. $5,196 / 1,732 = 3,000$.

Учитель: Где чаще всего ошибаются?

Ученик: Вычитают подкоренные числа: $\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{63}$. И неверно выносят множитель: пишут $\sqrt{75} = 25\sqrt{3}$, хотя в коэффициент идёт $\sqrt{25} = 5$.

Учитель: Реши самостоятельно: $(\sqrt{98} - \sqrt{50}) / \sqrt{2}$.

Задача В. Разность квадратов с корнями

Условие: найдите значение выражения $(\sqrt{11} + 2\sqrt{7})(\sqrt{11} - 2\sqrt{7})$.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Произведение суммы и разности одних и тех же выражений: $\sqrt{11}$ и $2\sqrt{7}$. Это формула разности квадратов.

Учитель: Какое правило и откуда оно?

Ученик: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Если раскрыть скобки, получим $a^2 - ab + ab - b^2$, средние слагаемые сокращаются. Ещё нужно знать, что $(\sqrt{11})^2 = 11$ по определению корня и $(2\sqrt{7})^2 = 2^2 \cdot (\sqrt{7})^2 = 4 \cdot 7 = 28$.

Учитель: Составь план.

Ученик: Найти a^2 , найти b^2 , вычесть.

Учитель: Почему не раскрывать скобки по одной?

Ученик: Можно, но получится $\sqrt{11} \cdot \sqrt{11} - 2\sqrt{11} \cdot \sqrt{7} + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{11} - 4 \cdot 7$, и средние слагаемые всё равно сократятся. Формула быстрее и там меньше шансов ошибиться со знаком.

Учитель: Выполни.

Ученик: $a = \sqrt{11}$, $a^2 = 11$. $b = 2\sqrt{7}$, $b^2 = 4 \cdot 7 = 28$. $a^2 - b^2 = 11 - 28 = -17$.

Учитель: Запиши цепочку целиком.

Ученик: $(\sqrt{11} + 2\sqrt{7})(\sqrt{11} - 2\sqrt{7}) = (\sqrt{11})^2 - (2\sqrt{7})^2 = 11 - 4 \cdot 7 = 11 - 28 = -17$. **Ответ: -17.**

Учитель: Проверь другим способом.

Ученик: $\sqrt{11} \approx 3,3166$; $2\sqrt{7} \approx 5,2915$. Сумма $\approx 8,6081$, разность $\approx -1,9749$. Произведение $\approx -17,00$.

Учитель: Где чаще всего ошибаются?

Ученик: $(2\sqrt{7})^2$ считают равным 14 или $4\sqrt{7}$: забывают, что в квадрат возводится и коэффициент, и корень. И теряют знак: ответ отрицательный, потому что $11 < 28$.

Учитель: Реши самостоятельно: $(3\sqrt{5} + \sqrt{13})(3\sqrt{5} - \sqrt{13})$.

Задача С. Квадрат разности и сокращение слагаемых с корнем

Условие: найдите значение выражения $(\sqrt{7} - 2)^2 + 4\sqrt{7}$.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Квадрат разности с корнем и слагаемое $4\sqrt{7}$. Ответ должен быть числом, значит слагаемые с $\sqrt{7}$ где-то сократятся.

Учитель: Какое правило и откуда оно?

Ученик: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Это произведение $(a - b)(a - b)$: $a^2 - ab - ab + b^2$. Для разности квадратов запись $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ была бы ошибкой, потому что пропадает удвоенное произведение.

Учитель: Составь план.

Ученик: Взять $a = \sqrt{7}$, $b = 2$. Найти a^2 , $2ab$, b^2 . Сложить, потом прибавить $4\sqrt{7}$ и привести подобные.

Учитель: Выполни.

Ученик: $a^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$. $2ab = 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2 = 4\sqrt{7}$. $b^2 = 4$. Значит $(\sqrt{7} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = 11 - 4\sqrt{7}$.

Учитель: Теперь всё выражение.

Ученик: $11 - 4\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 11$. Слагаемые $-4\sqrt{7}$ и $+4\sqrt{7}$ взаимно уничтожаются.

Учитель: Запиши цепочку целиком.

Ученик: $(\sqrt{7} - 2)^2 + 4\sqrt{7} = 7 - 4\sqrt{7} + 4 + 4\sqrt{7} = 11$.

Ответ: 11.

Учитель: Проверь другим способом.

Ученик: $\sqrt{7} \approx 2,6458$; $\sqrt{7} - 2 \approx 0,6458$; квадрат $\approx 0,4170$; $4\sqrt{7} \approx 10,583$. Сумма $\approx 11,000$.

Учитель: Где чаще всего ошибаются?

Ученик: Теряют удвоенное произведение: $(\sqrt{7} - 2)^2$ записывают как $7 - 4$ и получают 3. Тогда корень в ответе не сократится, и это сигнал ошибки.

Учитель: Реши самостоятельно: $(\sqrt{13} + 3)^2 - 6\sqrt{13}$.

Задача D. Корень из произведения степеней

Условие: найдите значение выражения $\sqrt{(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2) / 12}$.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Под корнем произведение степеней, все показатели чётные: 6, 4 и 2. Потом деление на 12.

Учитель: Какое правило и откуда оно?

Ученик: При $a \geq 0$ корень из a^{2n} равен a^n : показатель под корнем делят на 2. Это следует из того, что $(a^n)^2 = a^{2n}$ и число a^n неотрицательно. Корень из произведения равен произведению корней, поэтому извлекаем корень из каждого множителя.

Учитель: Составь план.

Ученик: Корень из каждой степени (показатель пополам) $\rightarrow$ перемножить $\rightarrow$ разделить на 12.

Учитель: Выполни.

Ученик: $\sqrt{(2^6)} = 2^3 = 8$. $\sqrt{(3^4)} = 3^2 = 9$. $\sqrt{(5^2)} = 5$.

Учитель: Дальше.

Ученик: $8 \cdot 9 \cdot 5 = 72 \cdot 5 = 360$. $360 / 12 = 30$.

Учитель: Запиши цепочку целиком.

Ученик: $\sqrt{(2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2)} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$. $360 / 12 = 30$. **Ответ: 30.**

Учитель: Проверь другим способом.

Ученик: $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = 64 \cdot 81 \cdot 25 = 129600$. $360^2 = 129600$, значит корень равен 360. $360 / 12 = 30$.

Учитель: Где чаще всего ошибаются?

Ученик: Показатель не делят на 2, а оставляют или вычитают: считают $\sqrt{(2^6)}$ равным 2^6 или 2^4 . Правильно $2^3 = 8$.

Учитель: Реши самостоятельно: $\sqrt{(2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^4)} / 20$.

Задача E. Корни из десятичных дробей

Условие: найдите значение выражения $\sqrt{1,6 \cdot \sqrt{40} - \sqrt{(0,01 \cdot 25)}}$.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Десятичные дроби под корнем. Первое слагаемое — произведение двух корней, второе — корень из произведения.

Учитель: Какое правило и откуда оно?

Ученик: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Это то же свойство произведения, прочитанное справа налево. И запись корня из десятичной дроби: после запятой под корнем вдвое больше знаков, чем в ответе, потому что при возведении в квадрат число знаков после запятой удваивается: $0,5^2 = 0,25$.

Учитель: Составь план.

Ученик: Первое слагаемое — под один корень. Второе — найти произведение под корнем. Вычесть.

Учитель: Выполни первое слагаемое.

Ученик: $1,6 \cdot 40 = 64$, $\sqrt{64} = 8$.

Учитель: Второе.

Ученик: $0,01 \cdot 25 = 0,25$, $\sqrt{0,25} = 0,5$, так как $0,5^2 = 0,25$. Можно и по частям: $\sqrt{0,01} = 0,1$, $\sqrt{25} = 5$, $0,1 \cdot 5 = 0,5$.

Учитель: Запиши цепочку целиком.

Ученик: $\sqrt{1,6 \cdot \sqrt{40}} = \sqrt{64} = 8$. $\sqrt{(0,01 \cdot 25)} = \sqrt{0,25} = 0,5$. $8 - 0,5 = 7,5$. **Ответ: 7,5.**

Учитель: Проверь другим способом.

Ученик: $\sqrt{1,6} \approx 1,2649$; $\sqrt{40} \approx 6,3246$; произведение $\approx 8,000$. $8 - 0,5 = 7,5$.

Учитель: Где чаще всего ошибаются?

Ученик: $\sqrt{0,01}$ считают равным 0,01 или 0,001. Правильно 0,1: в корне запятая переносится на вдвое меньше знаков.

Учитель: Реши самостоятельно: $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{10} - \sqrt{(0,04 \cdot 9)}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения (для учителя)

А: 2 · В: 32 · С: 22 · D: 60 · Е: 4,4.

Ключи: А) $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$, $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, разность $2\sqrt{2}$, частное 2. В) $9 \cdot 5 - 13 = 45 - 13 = 32$. С) $13 + 6\sqrt{13} + 9 - 6\sqrt{13} = 22$. D) $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 16 \cdot 3 \cdot 25 = 1200$; $1200 / 20 = 60$. Е) $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{0,36} = 0,6$; $5 - 0,6 = 4,4$.

Ответы на основные задачи: А: 3 · В: -17 · С: 11 · D: 30 · Е: 7,5.

План индивидуального урока, 60 минут

- 0-5 мин. Вход.** Устный опрос: 5 вопросов из теории (рекомендую вопросы про $\sqrt{(a^2)} = |a|$, про корень из суммы, про вынесение множителя $\sqrt{75}$). Ошибки записать: они определяют акценты урока.
- 5-15 мин. Теория.** Диалог «Часть 1»: ученик сам объясняет, откуда берутся $\sqrt{(ab)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и вынесение множителя, и почему нет свойства для суммы. Учитель фиксирует алгоритм, памятка остаётся перед глазами.
- 15-25 мин. Разбор в диалоге.** Задача А: учитель только задаёт вопросы, ученик вслух объясняет «откуда это берётся».
- 25-40 мин. Самостоятельная работа.** Задачи В и С. Ученик записывает каждое действие, учитель молчит и фиксирует ошибки. Затем сверка с разбором и ловушками.

- 40-50 мин. Пятиминутка.** Вариант А (5–7 минут), проверка по ответам. Четыре и более баллов из пяти: тренажёр с новыми числами; меньше: повторить ловушки, где были ошибки.
- 50-57 мин. Работа над ошибками и бланк.** Каждая ошибка: какое правило нарушено, переписать верно, решить аналогичное. Потренироваться записывать ответ в бланк №1 (запятая, без знака корня).
- 57-60 мин. Итог и ДЗ.** Ученик называет три ловушки и два признака, по которым выбирает приём. Выдать домашнюю карточку. Самооценка от 1 до 5: «могу объяснить это другому».

Резерв: если урок идёт быстрее, разобрать D (корень из степеней) или Е (десятичные дроби). Если медленнее, пятиминутку перенести на домашнюю работу.

План домашней работы

- День 1.** Домашняя карточка: 4 задачи, 20–25 минут. Записывать каждое действие, ответ вносить в бланк по правилам памятки.
- Дни 2-3.** Тренажёр с новыми числами: по 5 заданий в день, брать типы, где были ошибки на уроке.
- Перед следующим уроком.** 3 вопроса устного опроса, ученик отвечает первым делом (5 минут).
- Следующий урок.** Проверка карточки по ключевым точкам из её конца (10 минут), затем зачётный лист (уровни 1 и 2) на оценку; уровень 3 по желанию.
- Через неделю.** Три задачи на корни вперемешку с другой темой (степени, дроби, проценты, уравнения), чтобы проверить, что навык удержался.