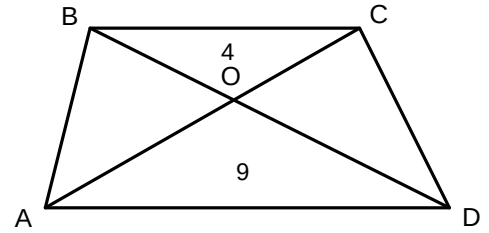


Разбор 5 задач повышенной сложности • трапеция

Задачи 1–4 уровня №23 (вычисление, 2 балла), задача 5 уровня №24 (доказательство, 2 балла). Ответы проверены расчётом по координатам. Задания составлены автором комплекта по типам прототипов, не скопированы из открытого банка.

Задача 1. Диагонали и площади треугольников (№23)

Условие. Диагонали AC и BD трапеции ABCD с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.



Что видим. Дана трапеция, диагонали разбивают её на четыре треугольника. Известны площади двух треугольников у оснований, нужна площадь всей фигуры. Площади боковых треугольников AOB и COD не даны: их нужно найти.

Идея. Подобие треугольников BOC и DOA даёт отношение AO : OC. Затем общая высота и равенность боковых треугольников.

Решение по шагам.

1. Треугольники BOC и DOA подобны по двум углам: $\angle OBC = \angle ODA$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD), $\angle BOC = \angle DOA$ (вертикальные).
2. Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия: $k^2 = S(BOC) : S(AOD) = 4 : 9$, значит $k = BC : AD = 2 : 3$. Поэтому $AO : OC = AD : BC = 3 : 2$.
3. Треугольники AOB и BOC имеют общую высоту из вершины B на прямую AC. Их площади относятся как основания AO и OC: $S(AOB) = S(BOC) \cdot AO / OC = 4 \cdot 3/2 = 6$.
4. Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты (расстояние между параллельными BC и AD). Значит, $S(ABD) = S(ACD)$. Вычтем общий треугольник AOD: $S(AOB) = S(COD) = 6$.
5. $S(ABCD) = S(BOC) + S(AOD) + S(AOB) + S(COD) = 4 + 9 + 6 + 6 = 25$.

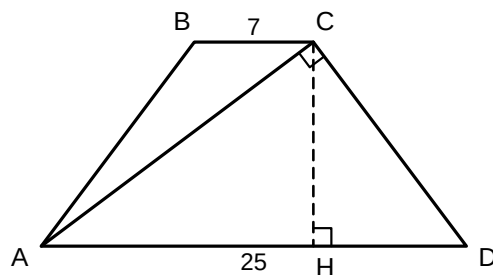
Ответ: 25.

Проверка. Проверка по формуле $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 = (2 + 3)^2 = 25$. Но эту формулу нет в учебнике: если пользуетесь ею, выведите её по ходу решения, как в шагах 2–4.

Ловушка. Сложить только 4 и 9 и получить 13: забыли два боковых треугольника. Или считать боковые треугольники равными 4 и 9.

Задача 2. Равнобедренная трапеция, диагональ $\perp$ боковой стороне (№23)

Условие. В равнобедренной трапеции основания равны 7 и 25, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции.



Что видим. Равнобедренная трапеция ABCD, $AD = 25$, $BC = 7$, $AC \perp CD$. Площадь = полусумма оснований на высоту: основания есть, нужна высота. Условие $AC \perp CD$ пока не использовано.

Идея. Провести высоту CH. Из равнобедренности найти HD. Затем треугольник ACD прямоугольный, CH — его высота к гипотенузе.

Решение по шагам.

1. Проведём высоты BK и CH. Прямоугольные треугольники ABK и DCH равны по гипотенузе и катету, поэтому $AK = HD$. BCHK — прямоугольник, $KH = BC = 7$. Значит, $HD = (AD - BC) / 2 = (25 - 7) / 2 = 9$.
2. В треугольнике ACD угол ACD прямой, CH — высота к гипотенузе AD. Квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию катета: $CD^2 = HD \cdot AD = 9 \cdot 25 = 225$, $CD = 15$.
3. Из прямоугольного треугольника CHD: $CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$.
4. $S(ABCD) = (AD + BC) / 2 \cdot CH = (25 + 7) / 2 \cdot 12 = 16 \cdot 12 = 192$.

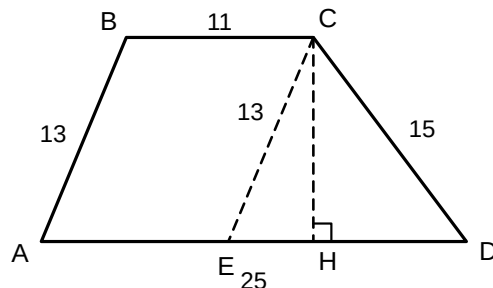
Ответ: 192.

Проверка. Проверка: $CH^2 = AH \cdot HD$. $AH = 25 - 9 = 16$, $16 \cdot 9 = 144 = 12^2$. Верно.

Ловушка. Перепутать отрезки: $HD = (a - b)/2 = 9$, а $AH = (a + b)/2 = 16$. Если подставить AH вместо HD, получится $CD = 20$ и неверная высота.

Задача 3. Известны боковые стороны, перенос боковой стороны (№23)

Условие. Основания трапеции равны 11 и 25, а боковые стороны равны 13 и 15. Найдите площадь трапеции.



Что видим. Трапеция ABCD, $AD = 25$, $BC = 11$, $AB = 13$, $CD = 15$. Высоты нет, по боковым сторонам напрямую её не найти: в каждом прямоугольном треугольнике по одной неизвестной.

Идея. Через C провести прямую, параллельную AB. Получится параллелограмм и треугольник со сторонами 13, 14, 15: его площадь и высоту найдём по формуле Герона.

Решение по шагам.

1. Проведём $CE \parallel AB$, E лежит на AD. ABCE — параллелограмм ($BC \parallel AE$ и $AB \parallel CE$). Поэтому $AE = BC = 11$, $CE = AB = 13$, $ED = AD - AE = 25 - 11 = 14$.
2. В треугольнике CED стороны 13, 14, 15. Полупериметр $p = 21$. По формуле Герона $S(CED) = \sqrt{(21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)} = \sqrt{7056} = 84$.
3. Высота CH треугольника CED к стороне ED: $CH = 2 \cdot 84 / 14 = 12$. Это и высота трапеции (расстояние между BC и AD).
4. $S(ABCD) = (AD + BC) / 2 \cdot CH = (25 + 11) / 2 \cdot 12 = 18 \cdot 12 = 216$.

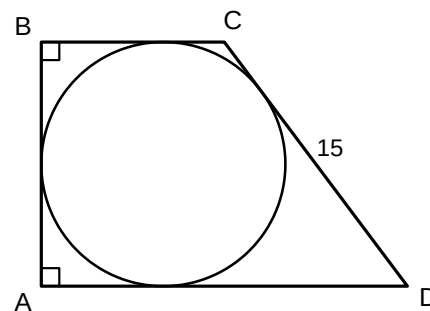
Ответ: 216.

Проверка. Второй способ: пусть $AH_1 = x$ — проекция AB, h — высота. $x^2 + h^2 = 169$ и $(14 - x)^2 + h^2 = 225$. Вычитая, получаем $196 - 28x = 56$, $x = 5$, $h = 12$. Площадь та же.

Ловушка. Искать высоту из одного прямоугольного треугольника: в нём две неизвестные. Нужно второе уравнение или построение, которое замыкает данные в один треугольник.

Задача 4. Прямоугольная трапеция и вписанная окружность (№23)

Условие. Около окружности радиуса 6 описана прямоугольная трапеция, большая боковая сторона которой равна 15. Найдите площадь трапеции.



Что видим. Прямоугольная трапеция ABCD ($\angle A = \angle B = 90^\circ$), в неё вписана окружность $r = 6$, $CD = 15$. Нужна высота (она связана с r) и сумма оснований (она связана со сторонами через описанный четырёхугольник).

Идея. Высота равна диаметру. Сумма оснований равна сумме боковых сторон. Основания по отдельности искать не нужно.

Решение по шагам.

1. Окружность касается обоих оснований, поэтому расстояние между ними равно диаметру: $h = 2r = 12$. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона перпендикулярна основаниям, значит $AB = h = 12$.
2. Трапеция описана около окружности, поэтому суммы противоположных сторон равны: $AD + BC = AB + CD = 12 + 15 = 27$.
3. $S(ABCD) = (AD + BC) / 2 \cdot h = 27 / 2 \cdot 12 = 162$.

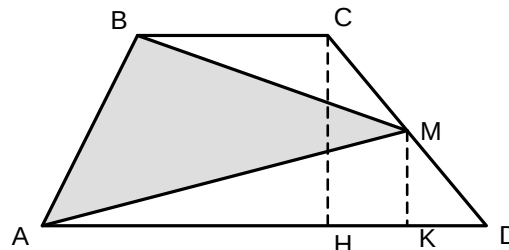
Ответ: 162.

Проверка. Проверка. Проекция CD на основание $\sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, поэтому $AD - BC = 9$; вместе с $AD + BC = 27$ получаем $AD = 18$, $BC = 9$. Полупериметр равен 27, и $r = S / p = 162 / 27 = 6$.

Ловушка. Принять высоту за радиус: $h = r = 6$ и получить 81. Высота равна диаметру, то есть $2r$.

Задача 5. Доказательство: площадь треугольника АВМ (№24)

Условие. Точка М — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ABM равна половине площади трапеции.



Что видим. Нужно доказать равенство площадей. Числа не даны, значит, работаем с буквами: основания $AD = a$, $BC = b$, высота h . Доказательство должно быть общим, не для конкретного чертежа.

Идея. Площадь ABM = площадь трапеции минус два треугольника при основаниях: BCM и AMD . Их высоты из M равны $h/2$.

Решение по шагам.

1. Пусть $AD = a$, $BC = b$, высота трапеции $CH = h$, S — площадь трапеции. Треугольник ABM вместе с треугольниками BCM и AMD составляет трапецию, поэтому $S(ABM) = S - S(BCM) - S(AMD)$.
2. Проведём $MK \perp AD$. Прямые CH и MK перпендикулярны AD , поэтому параллельны. M — середина CD , значит, по теореме Фалеса K — середина HD , а MK — средняя линия треугольника CHD : $MK = h / 2$.
3. Расстояние от M до прямой BC равно $h - h/2 = h/2$ ($BC \parallel AD$, расстояние между ними h).
4. $S(BCM) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h/2 = bh/4$ и $S(AMD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h/2 = ah/4$. Их сумма равна $(a + b)h / 4 = S / 2$, так как $S = (a + b)h / 2$.
5. Тогда $S(ABM) = S - S/2 = S/2$. Что и требовалось доказать.

Что и требовалось доказать.

Ловушка. Доказывать на примере с числами или «по чертежу»: это частный случай, балл не поставят. Не обоснованное «высоты из M равны $h/2$ » тоже считается пробелом: нужен шаг со средней линией.