

Теория и устный опрос: график кусочной функции и её свойства

Задание 22 ОГЭ (часть 2, 2 балла, до 2023 года тоже было под номером 22). Печать: 2 листа А4.

1. Что требуется в задании 22

Построить график функции, заданной формулой (кусочно, с модулем или дробью), и найти, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ (или при каких k прямая $y = kx$) имеет с графиком ровно одну, две, три общие точки либо не имеет их. Оценивается и график, и найденные значения.

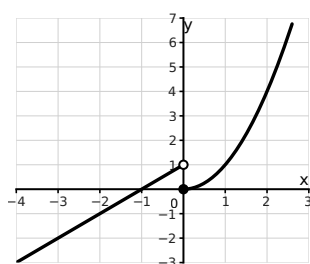
2. Основные понятия

Функция. Зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y . **Область определения** — все значения x ; **область значений** — все значения y . **График** — множество всех точек плоскости с абсциссами x и ординатами $y = f(x)$.

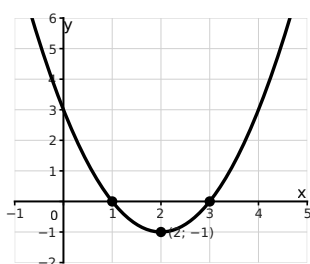
Кусочно-заданная функция — функция, которая на разных промежутках задана разными формулами, например

$$\begin{cases} x + 1, & \text{если } x < 0 \\ x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

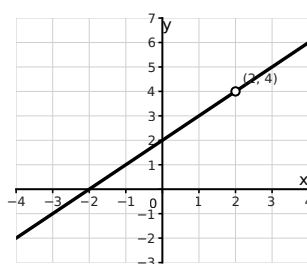
Каждую формулу строят только на своём промежутке; граничную точку закрашивают при нестрогом неравенстве и выкалывают при строгом.



Кусочная функция: (0; 1) выколота, (0; 0) закрашена



Парабола $y = x^2 - 4x + 3$



$y = (x^2 - 4)/(x - 2)$:
выколота (2; 4)

3. Какие графики нужно уметь строить

Формула	График	Как строить
$y = kx + b$	прямая	две точки; k — наклон ($k > 0$: возрастает), b — пересечение с Oy
$y = ax^2 + bx + c$	парабола	вершина $x_0 = -b/(2a)$; нули из $ax^2 + bx + c = 0$; ещё 2–3 точки по обе стороны; $a > 0$ — ветви вверх
$y = k/x$	гипербола	таблица для $x > 0$ и $x < 0$; $k > 0$ — I и III четверти, $k < 0$ — II и IV
$y = x $	«галочка»	$y = x$ при $x \geq 0$; $y = -x$ при $x < 0$

4. Алгоритм построения графика кусочной функции

- Выбрать масштаб: единичный отрезок — одна клетка, оси подписать.
- Для каждой формулы определить вид графика (прямая, парабола, гипербола).
- Для каждого промежутка составить таблицу точек, включая границы промежутка.
- Построить кусок только на своём промежутке: нестрогое неравенство — точка закрашена, строгое — выколота.
- Если на границе два значения, отметить обе точки.
- Проверка: вертикальная прямая пересекает график не более одного раза.

5. Дробь с сокращением

Для $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$: 1) область определения: $x - 2 \neq 0$, то есть $x \neq 2$; 2) разложить числитель: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; 3) сократить: $y = x + 2$ при $x \neq 2$; 4) построить прямую $y = x + 2$ и выколоть точку с абсциссой 2: $y(2) = 4$, точка (2; 4). Область определения находят до сокращения.

6. Модуль

$|a| = a$ при $a \geq 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$. Чтобы раскрыть модуль в формуле функции, находят, где выражение под модулем равно нулю, делят ось на промежутки и раскрывают модуль на каждом. Пример: $y = x|x| - 3|x|$. При $x \geq 0$: $y = x^2 - 3x$. При $x < 0$: $y = -x^2 + 3x$. Для функции $y = |f(x)|$ часть графика $y = f(x)$, лежащую ниже оси Ox , отражают симметрично вверх.

7. Свойства функции по графику

Область определения — проекция графика на ось Ox , область значений — проекция на Oy . Нули — абсциссы точек пересечения с Ox . Функция возрастает там, где график идёт вверх при движении слева направо, убывает — где вниз. Наибольшее и наименьшее значения — самая высокая и самая низкая точки графика (выколота)

точка значением не считается). Для $y = x^2 - 4x + 3$: нули 1 и 3; вершина (2; -1); убывает на $(-\infty; 2]$, возрастает на $[2; +\infty)$; наименьшее значение -1.

8. Число общих точек с прямой $y = m$ и $y = kx$

Прямая $y = m$. «Двигайте» горизонтальную прямую снизу вверх и считайте точки пересечения. Количество точек меняется только в особых положениях: на уровне вершин парабол, на уровне концов кусков и на уровне выколотых точек. Особые значения m проверяйте отдельно (подстановкой), а между ними считайте точки по рисунку.

Прямая $y = kx$. Она проходит через начало координат. Особые положения: через выколотую точку, через конец куска, касание параболы (дискриминант равен нулю). Ответ — отдельные значения k или промежутки.

9. Типичные ошибки

- Не найдена область определения до сокращения: выколотые точки потеряны.
- Выколотая точка нарисована, но при подсчёте общих точек не учтена.
- Перепутаны строгое и нестрогое неравенства: точка закрашена там, где должна быть выколотая.
- Вершина параболы найдена со знаком «минус» ($x_0 = -b/(2a)$, а не $b/(2a)$).
- Потеряны особые m : вершина, выколотая точка, значения на концах кусков.
- Ответ записан промежутком там, где нужны отдельные числа, и наоборот.

Вопросы для устного опроса (с ответами)

1. **Что такое функция?** Зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y . Например, $y = x^2$: каждому x соответствует одно значение y .
2. **Что такое область определения и область значений функции?** Область определения — все значения, которые принимает независимая переменная x . Область значений — все значения, которые принимает зависимая переменная y .
3. **Что называют графиком функции?** Множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.
4. **Как по рисунку проверить, что линия — график функции?** Любая вертикальная прямая пересекает линию не более чем в одной точке: одному x соответствует не больше одного y .
5. **Какую функцию называют кусочно-заданной?** Функцию, которая на разных промежутках изменения x задана разными формулами. Каждую формулу строят только на своём промежутке.
6. **Когда граничную точку куска закрашивают, а когда выкалывают?** Закрашивают, если неравенство нестрогое ($\leq, \geq$): точка принадлежит графику. Выкалывают (пустой кружок), если неравенство строгое ($<, >$) или значение x не входит в область определения.
7. **Как найти вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$?** Абсцисса вершины $x_0 = -b/(2a)$, ордината y_0 равна значению функции в этой точке: $y_0 = y(x_0)$.
8. **От чего зависит направление ветвей параболы?** От знака a : при $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.
9. **Как построить гиперболу $y = k/x$?** Составить таблицу значений для $x > 0$ и $x < 0$, например $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Две ветви: при $k > 0$ — в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV. Оси график не пересекает.
10. **Как раскрыть модуль?** $|a| = a$, если $a \geq 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Находят, где выражение под модулем равно нулю, делят ось на промежутки и на каждом раскрывают модуль со своим знаком.
11. **Как построить график $y = |x|$?** Для $x \geq 0$ строят $y = x$, для $x < 0$ строят $y = -x$. Получается «галочка» с вершиной в начале координат.
12. **Почему при сокращении дроби появляется выколотая точка и как найти её координаты?** Сокращение не расширяет область определения: значения x , при которых знаменатель был равен нулю, в график не входят. Абсциссу берут из знаменателя исходной дроби, ординату считают по сокращённой формуле.
13. **Сколько общих точек у прямой $y = m$ с параболой, если m выше вершины, в вершине, ниже вершины (ветви вверх)?** Две, одна, ни одной.
14. **Какие значения m нужно проверять отдельно?** Ординаты вершин парабол, значения на концах кусков (закрашенных и выколотых), ординаты выколотых точек.
15. **Чем отличается задача с прямой $y = m$ от задачи с прямой $y = kx$?** Прямая $y = m$ горизонтальна, её «двигают» вверх и вниз. Прямая $y = kx$ проходит через начало координат и «вращается» вокруг него; её особые положения: через выколотые точки, через концы кусков и касание.
16. **Что значит «функция возрастает на промежутке»?** Большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.
17. **Что такое нули функции?** Значения аргумента, при которых значение функции равно нулю. На графике это абсциссы точек пересечения с осью Ox .