

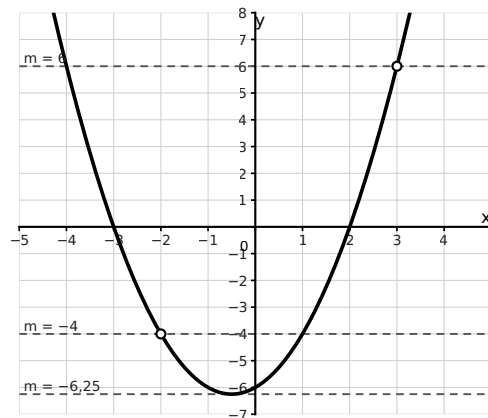
Разбор 5 задач повышенной сложности · график функции

Задание 22 ОГЭ. Печать: 3–4 страницы А4. Интерактивный тренажёр по этим же задачам — материал 5. Решайте сами, потом сверяйтесь.

Задача 1. Дробь с выколотыми точками, прямая $y = m$

Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x - 3)(x + 2)}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Область определения:** $(x - 3)(x + 2) \neq 0$, то есть $x \neq 3$ и $x \neq -2$.
2. **Числитель:** замена $t = x^2$: $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9)$, значит $x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.
3. **Сокращение:** $y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ при $x \neq 3$, $x \neq -2$.
4. **График — парабола**, ветви вверх. Вершина: $x_0 = -1/2$, $y_0 = -6,25$. Нули -3 и 2 . Таблица: $x = -4, -3, -1, 0, 1, 2, 4$ даёт $y = 6, 0, -6, -6, -4, 0, 14$. Выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.
5. **Двигаем прямую $y = m$ снизу вверх.** Ниже вершины точек нет. В вершине ($m = -6,25$) одна точка. Выше вершины обычно две, но на уровне $m = -4$ и $m = 6$ одна из двух точек выколота, остаётся одна.



Ответ: $m = -6,25$; $m = -4$; $m = 6$.

Проверка. $m = -4$: $x^2 + x - 2 = 0$, $x = 1$ или $x = -2$; точка $x = -2$ выколота, остаётся одна. $m = 6$: $x^2 + x - 12 = 0$, $x = 3$ или $x = -4$; точка $x = 3$ выколота, остаётся одна.

Ловушка. Взять только вершину ($m = -6,25$) и потерять $m = -4$ и $m = 6$. Это потеря балла: значения параметра найдены не все.

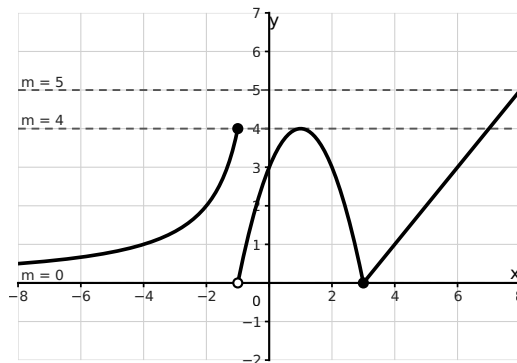
Задача 2. Кусочная функция с гиперболой

Условие. Постройте график функции $y =$

$$\begin{cases} -4/x, & \text{если } x \leq -1 \\ -x^2 + 2x + 3, & \text{если } -1 < x \leq 3 \\ x - 3, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Гипербола** $y = -4/x$ при $x \leq -1$ (II четверть): $x = -8, -4, -2, -1$ даёт $y = 0,5; 1; 2; 4$. Точка $(-1; 4)$ закрашена.
2. **Парабола** $y = -x^2 + 2x + 3$ на $(-1; 3]$, ветви вниз. Вершина $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Нули -1 и 3 . Точка $(-1; 0)$ выколота, точка $(3; 0)$ закрашена. Ещё точки: $(0; 3)$, $(2; 3)$.
3. **Прямая** $y = x - 3$ при $x > 3$: $x = 4, 5$ даёт $y = 1, 2$. Точка $(3; 0)$ здесь выколота, но принадлежит параболе, поэтому на графике закрашена.
4. **Считаем точки.** $m > 4$: только прямая, 1 точка. $m = 4$: гипербола, вершина, прямая, 3 точки. $0 < m < 4$: $1 + 2 + 1 = 4$ точки. $m = 0$: парабола в точке $x = 3$ ($x = -1$ выколота), 1 точка. $m < 0$: точек нет.



Ответ: $m = 0$; $m > 4$.

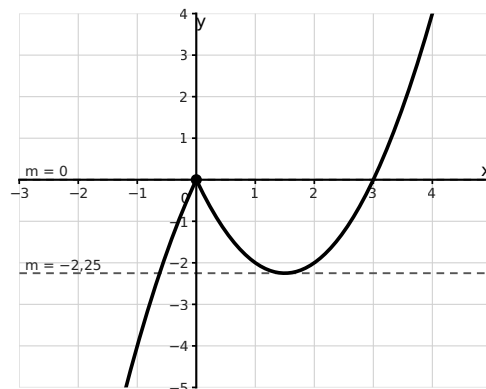
Проверка. При $m = 0$: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = 3$ или $x = -1$; $x = -1$ не входит в промежуток $(-1; 3]$, значит точка одна. Гипербола и прямая при $m = 0$ значений 0 не принимают.

Ловушка. При $m = 0$ посчитать две точки пересечения с параболой ($x = -1$ выколота). При $m = 4$ забыть про гипербола и получить две точки вместо трёх. Для этой задачи важно, что $(-1; 4)$ закрашена.

Задача 3. Модуль, прямая $y = m$

Условие. Постройте график функции $y = x|x| - 3|x|$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

1. **Раскрываем модуль.** При $x \geq 0$: $|x| = x$, $y = x^2 - 3x$. При $x < 0$: $|x| = -x$, $y = -x^2 + 3x$.
2. **Правый кусок** ($x \geq 0$): парабола, ветви вверх, нули 0 и 3, вершина $(1,5; -2,25)$. Точки: $(1; -2)$, $(2; -2)$, $(4; 4)$.
3. **Левый кусок** ($x < 0$): ветви вниз, вершина $x_0 = 1,5$ лежит правее промежутка, значит слева функция возрастает и $y < 0$. Точки: $(-1; -4)$, $(-2; -10)$.
4. **Считаем точки.** $m > 0$: 1 точка (только справа). $m = 0$: $x = 0$ и $x = 3$, 2 точки. $-2,25 < m < 0$: справа 2, слева 1, всего 3. $m = -2,25$: справа 1, слева 1, всего 2. $m < -2,25$: 1 точка.



Ответ: $m = -2,25$; $m = 0$.

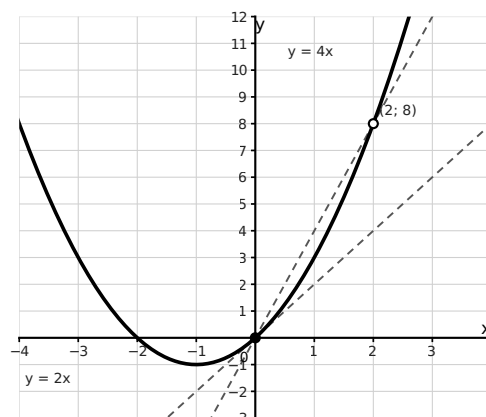
Проверка. $m = 0$: $x|x| - 3|x| = |x|(x - 3) = 0$, $x = 0$ или $x = 3$. $m = -2,25$: справа $x = 1,5$; слева $-x^2 + 3x = -2,25$, откуда $x^2 - 3x - 2,25 = 0$ и подходит $x = (3 - 3\sqrt{2})/2 < 0$.

Ловушка. Считать график симметричным (как у $y = x^2 - 3|x|$). Здесь $x|x|$ нечётная функция, левая часть — другая парабола.

Задача 4. Дробь, прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$. Определите, при каких k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Область определения:** $x \neq 2$.
2. **Сокращение:** $x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$, поэтому $y = x(x + 2) = x^2 + 2x$ при $x \neq 2$. Выколота точка $(2; 8)$.
3. **Парабола**, ветви вверх, вершина $(-1; -1)$, нули -2 и 0 . Точки: $(-3; 3)$, $(1; 3)$, $(-2; 0)$, $(0; 0)$.
4. **Прямая $y = kx$ проходит через $(0; 0)$** , а эта точка принадлежит графику. Значит одна общая точка есть всегда, нужно, чтобы вторых не было.
5. $x^2 + 2x = kx$, то есть $x(x + 2 - k) = 0$: $x = 0$ или $x = k - 2$. Вторая точка исчезает, если она совпадает с первой ($k - 2 = 0$, $k = 2$, прямая касается параболы) или выколота ($k - 2 = 2$, $k = 4$, прямая проходит через $(2; 8)$).



Ответ: $k = 2$; $k = 4$.

Проверка. $k = 2$: $x^2 = 0$, единственный корень $x = 0$. $k = 4$: $x^2 - 2x = 0$, $x = 0$ или $x = 2$, а $x = 2$ выколота.

Ловушка. Найти только $k = 4$ («прямая через выколотую точку») и забыть касание в начале координат ($k = 2$), либо забыть, что $(0; 0)$ всегда на графике.

Задача 5. Дробь с модулем

Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 3|x|}{x}$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Область определения:** $x \neq 0$.
2. **Раскрываем модуль.** При $x > 0$: $|x| = x$, $y = (x^2 - 3x)/x = x - 3$. При $x < 0$: $|x| = -x$, $y = (x^2 + 3x)/x = x + 3$.
3. **График — два луча.** Левый: $y = x + 3$ при $x < 0$, конец $(0; 3)$ выколота. Правый: $y = x - 3$ при $x > 0$, конец $(0; -3)$ выколота. Точки: $(-3; 0)$, $(-1; 2)$, $(1; -2)$, $(3; 0)$.
4. **Значения.** Левый луч принимает все значения $y < 3$, правый — все $y > -3$.
5. **Считаем точки.** $m \leq -3$: подходит только левый луч, 1 точка (при $m = -3$ правая точка $x = 0$ выколота). $-3 < m < 3$: два луча, 2 точки. $m \geq 3$: только правый луч, 1 точка (при $m = 3$ левая точка $x = 0$ выколота).

Ответ: $m \leq -3$ или $m \geq 3$, то есть $m \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Проверка. $m = 3$: левая ветвь даёт $x = 0$, она выколота; правая даёт $x = 6$, значит одна точка. $m = -3$: левая даёт $x = -6$, правая $x = 0$ (выколота), одна точка.

Ловушка. Не включить граничные $m = -3$ и $m = 3$ (в ответе « $m < -3$ или $m > 3$ »), хотя в них одна из точек выколота и общая точка остаётся одна.

