

Теория и устный опрос: график кусочной функции и её свойства

Задание 22 ОГЭ (часть 2, 2 балла, до 2023 года тоже было под номером 22). Печать: 2 листа А4.

1. Что требуется в задании 22

Построить график функции, заданной формулой (кусочно, с модулем или дробью), и найти, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ (или при каких k прямая $y = kx$) имеет с графиком ровно одну, две, три общие точки либо не имеет их. Оценивается и график, и найденные значения.

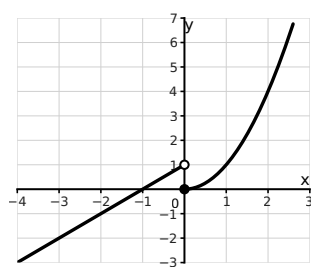
2. Основные понятия

Функция. Зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y . **Область определения** — все значения x ; **область значений** — все значения y . **График** — множество всех точек плоскости с абсциссами x и ординатами $y = f(x)$.

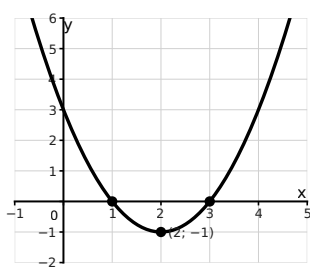
Кусочно-заданная функция — функция, которая на разных промежутках задана разными формулами, например

$$\begin{cases} x + 1, & \text{если } x < 0 \\ x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

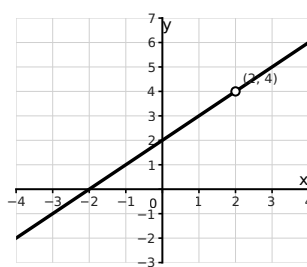
Каждую формулу строят только на своём промежутке; граничную точку закрашивают при нестрогом неравенстве и выкалывают при строгом.



Кусочная функция: (0; 1) выколота, (0; 0) закрашена



Парабола $y = x^2 - 4x + 3$



$y = (x^2 - 4)/(x - 2)$:
выколота (2; 4)

3. Какие графики нужно уметь строить

Формула	График	Как строить
$y = kx + b$	прямая	две точки; k — наклон ($k > 0$: возрастает), b — пересечение с Оу
$y = ax^2 + bx + c$	парабола	вершина $x_0 = -b/(2a)$; нули из $ax^2 + bx + c = 0$; ещё 2–3 точки по обе стороны; $a > 0$ — ветви вверх
$y = k/x$	гипербола	таблица для $x > 0$ и $x < 0$; $k > 0$ — I и III четверти, $k < 0$ — II и IV
$y = x $	«галочка»	$y = x$ при $x \geq 0$; $y = -x$ при $x < 0$

4. Алгоритм построения графика кусочной функции

- Выбрать масштаб: единичный отрезок — одна клетка, оси подписать.
- Для каждой формулы определить вид графика (прямая, парабола, гипербола).
- Для каждого промежутка составить таблицу точек, включая границы промежутка.
- Построить кусок только на своём промежутке: нестрогое неравенство — точка закрашена, строгое — выколота.
- Если на границе два значения, отметить обе точки.
- Проверка: вертикальная прямая пересекает график не более одного раза.

5. Дробь с сокращением

Для $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$: 1) область определения: $x - 2 \neq 0$, то есть $x \neq 2$; 2) разложить числитель: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; 3) сократить: $y = x + 2$ при $x \neq 2$; 4) построить прямую $y = x + 2$ и выколоть точку с абсциссой 2: $y(2) = 4$, точка (2; 4). Область определения находят до сокращения.

6. Модуль

$|a| = a$ при $a \geq 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$. Чтобы раскрыть модуль в формуле функции, находят, где выражение под модулем равно нулю, делят ось на промежутки и раскрывают модуль на каждом. Пример: $y = x|x| - 3|x|$. При $x \geq 0$: $y = x^2 - 3x$. При $x < 0$: $y = -x^2 + 3x$. Для функции $y = |f(x)|$ часть графика $y = f(x)$, лежащую ниже оси Ох, отражают симметрично вверх.

7. Свойства функции по графику

Область определения — проекция графика на ось Ох, область значений — проекция на Оу. Нули — абсциссы точек пересечения с Ох. Функция возрастает там, где график идёт вверх при движении слева направо, убывает — где вниз. Наибольшее и наименьшее значения — самая высокая и самая низкая точки графика (выколота)

точка значением не считается). Для $y = x^2 - 4x + 3$: нули 1 и 3; вершина (2; -1); убывает на $(-\infty; 2]$, возрастает на $[2; +\infty)$; наименьшее значение -1.

8. Число общих точек с прямой $y = m$ и $y = kx$

Прямая $y = m$. «Двигайте» горизонтальную прямую снизу вверх и считайте точки пересечения. Количество точек меняется только в особых положениях: на уровне вершин парабол, на уровне концов кусков и на уровне выколотых точек. Особые значения m проверяйте отдельно (подстановкой), а между ними считайте точки по рисунку.

Прямая $y = kx$. Она проходит через начало координат. Особые положения: через выколотую точку, через конец куска, касание параболы (дискриминант равен нулю). Ответ — отдельные значения k или промежутки.

9. Типичные ошибки

- Не найдена область определения до сокращения: выколотые точки потеряны.
- Выколотая точка нарисована, но при подсчёте общих точек не учтена.
- Перепутаны строгое и нестрогое неравенства: точка закрашена там, где должна быть выколотая.
- Вершина параболы найдена со знаком «минус» ($x_0 = -b/(2a)$, а не $b/(2a)$).
- Потеряны особые m : вершина, выколотая точка, значения на концах кусков.
- Ответ записан промежутком там, где нужны отдельные числа, и наоборот.

Вопросы для устного опроса (с ответами)

1. **Что такое функция?** Зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y . Например, $y = x^2$: каждому x соответствует одно значение y .
2. **Что такое область определения и область значений функции?** Область определения — все значения, которые принимает независимая переменная x . Область значений — все значения, которые принимает зависимая переменная y .
3. **Что называют графиком функции?** Множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.
4. **Как по рисунку проверить, что линия — график функции?** Любая вертикальная прямая пересекает линию не более чем в одной точке: одному x соответствует не больше одного y .
5. **Какую функцию называют кусочно-заданной?** Функцию, которая на разных промежутках изменения x задана разными формулами. Каждую формулу строят только на своём промежутке.
6. **Когда граничную точку куска закрашивают, а когда выкалывают?** Закрашивают, если неравенство нестрогое ($\leq, \geq$): точка принадлежит графику. Выкалывают (пустой кружок), если неравенство строгое ($<, >$) или значение x не входит в область определения.
7. **Как найти вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$?** Абсцисса вершины $x_0 = -b/(2a)$, ордината y_0 равна значению функции в этой точке: $y_0 = y(x_0)$.
8. **От чего зависит направление ветвей параболы?** От знака a : при $a > 0$ ветви направлены вверх, при $a < 0$ — вниз.
9. **Как построить гиперболу $y = k/x$?** Составить таблицу значений для $x > 0$ и $x < 0$, например $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Две ветви: при $k > 0$ — в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV. Оси график не пересекает.
10. **Как раскрыть модуль?** $|a| = a$, если $a \geq 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Находят, где выражение под модулем равно нулю, делят ось на промежутки и на каждом раскрывают модуль со своим знаком.
11. **Как построить график $y = |x|$?** Для $x \geq 0$ строят $y = x$, для $x < 0$ строят $y = -x$. Получается «галочка» с вершиной в начале координат.
12. **Почему при сокращении дроби появляется выколотая точка и как найти её координаты?** Сокращение не расширяет область определения: значения x , при которых знаменатель был равен нулю, в график не входят. Абсциссу берут из знаменателя исходной дроби, ординату считают по сокращённой формуле.
13. **Сколько общих точек у прямой $y = m$ с параболой, если m выше вершины, в вершине, ниже вершины (ветви вверх)?** Две, одна, ни одной.
14. **Какие значения m нужно проверять отдельно?** Ординаты вершин парабол, значения на концах кусков (закрашенных и выколотых), ординаты выколотых точек.
15. **Чем отличается задача с прямой $y = m$ от задачи с прямой $y = kx$?** Прямая $y = m$ горизонтальна, её «двигают» вверх и вниз. Прямая $y = kx$ проходит через начало координат и «вращается» вокруг него; её особые положения: через выколотые точки, через концы кусков и касание.
16. **Что значит «функция возрастает на промежутке»?** Большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.
17. **Что такое нули функции?** Значения аргумента, при которых значение функции равно нулю. На графике это абсциссы точек пересечения с осью Ox .

Карточки-пятиминутки · графики функций

Печать: оба варианта на одном листе А4, разрезать по пунктиру. Ответы внизу отрезать до раздачи.

Вариант А

Фамилия, имя: 5–7 мин

1. Для параболы $y = x^2 - 6x + 5$ найдите координаты вершины и точки пересечения с осью Ox .

[illegible]

Ответ: _____

2. Запишите функцию $y = x^2 - 4|x|$ без знака модуля отдельно для $x \geq 0$ и для $x < 0$.

[illegible]

Ответ:

3. Сократите дробь в формуле $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ и укажите координаты выколотой точки.

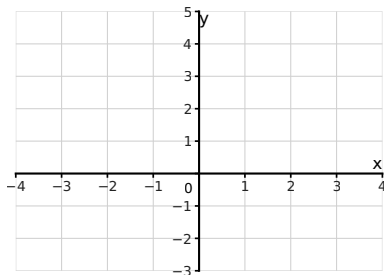
[illegible]

Ответ: _____

4. Практическая задача. Постройте график функции

$$\begin{cases} y = x^2, \text{ если } x \leq 1 \\ y = 2 - x, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$

При каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку?



Ответ:

Вариант Б

Фамилия, имя: 5–7 мин

1. Для параболы $y = -x^2 + 4x - 3$ найдите координаты вершины и точки пересечения с осью Ox .

[illegible]

Ответ: _____

2. Запишите функцию $y = x^2 - 6|x|$ без знака модуля отдельно для $x \geq 0$ и для $x < 0$.

[illegible]

Ответ:

3. Сократите дробь в формуле $y = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ и укажите координаты выколотой точки.

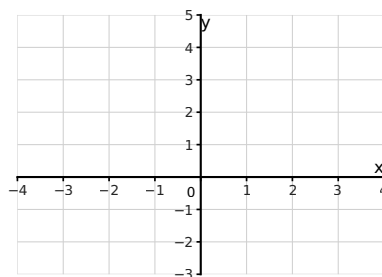
[illegible]

Ответ: _____

4. Практическая задача. Постройте график функции

$$\begin{cases} y = x + 3, \text{ если } x \leq -1 \\ y = 3 - x^2, \text{ если } x > -1 \end{cases}$$

При каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки?



Ответ:

Ответы и ключи (отрезать до раздачи).

Вариант А. 1) вершина $(3; -4)$, $x_0 = 6/2 = 3$, $y_0 = 9 - 18 + 5 = -4$; нули 1 и 5. 2) при $x \geq 0$: $y = x^2 - 4x$; при $x < 0$: $y = x^2 + 4x$. 3) $y = x - 3$ при $x \neq -3$; выколота $(-3; -6)$. 4) $m < 0$ или $m > 1$: при $m = 0$ и $m = 1$ точек две, при $0 < m < 1$ три. Ключ: точка $(1; 1)$ принадлежит обоим кускам.

Вариант Б. 1) вершина (2; 1), нули 1 и 3. 2) при $x \geq 0$: $y = x^2 - 6x$; при $x < 0$: $y = x^2 + 6x$. 3) $y = x + 4$ при $x \neq 4$; выколота (4; 8). 4) $m < 3$: при $m = 3$ одна точка, при $m > 3$ нет точек. Ключ: точка (-1; 2) закрашена у прямой и выколота у параболы.

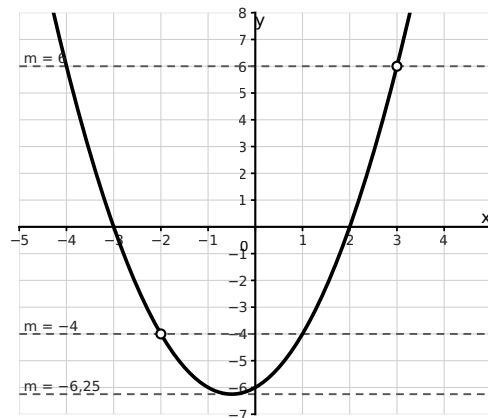
Разбор 5 задач повышенной сложности · график функции

Задание 22 ОГЭ. Печать: 3–4 страницы А4. Интерактивный тренажёр по этим же задачам — материал 5. Решайте сами, потом сверяйтесь.

Задача 1. Дробь с выколотыми точками, прямая $y = m$

Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x - 3)(x + 2)}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Область определения:** $(x - 3)(x + 2) \neq 0$, то есть $x \neq 3$ и $x \neq -2$.
2. **Числитель:** замена $t = x^2$: $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9)$, значит $x^4 - 13x^2 + 36 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.
3. **Сокращение:** $y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$ при $x \neq 3$, $x \neq -2$.
4. **График — парабола**, ветви вверх. Вершина: $x_0 = -1/2$, $y_0 = -6,25$. Нули -3 и 2 . Таблица: $x = -4, -3, -1, 0, 1, 2, 4$ даёт $y = 6, 0, -6, -6, -4, 0, 14$. Выколоты точки $(-2; -4)$ и $(3; 6)$.
5. **Двигаем прямую $y = m$ снизу вверх.** Ниже вершины точек нет. В вершине ($m = -6,25$) одна точка. Выше вершины обычно две, но на уровне $m = -4$ и $m = 6$ одна из двух точек выколота, остаётся одна.



Ответ: $m = -6,25$; $m = -4$; $m = 6$.

Проверка. $m = -4$: $x^2 + x - 2 = 0$, $x = 1$ или $x = -2$; точка $x = -2$ выколота, остаётся одна. $m = 6$: $x^2 + x - 12 = 0$, $x = 3$ или $x = -4$; точка $x = 3$ выколота, остаётся одна.

Ловушка. Взять только вершину ($m = -6,25$) и потерять $m = -4$ и $m = 6$. Это потеря балла: значения параметра найдены не все.

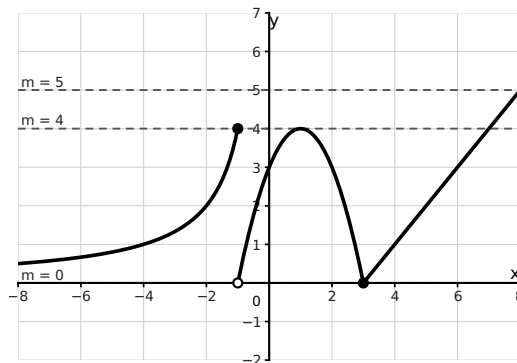
Задача 2. Кусочная функция с гиперболой

Условие. Постройте график функции $y =$

$$\begin{cases} -4/x, & \text{если } x \leq -1 \\ -x^2 + 2x + 3, & \text{если } -1 < x \leq 3 \\ x - 3, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Гипербола** $y = -4/x$ при $x \leq -1$ (II четверть): $x = -8, -4, -2, -1$ даёт $y = 0,5; 1; 2; 4$. Точка $(-1; 4)$ закрашена.
2. **Парабола** $y = -x^2 + 2x + 3$ на $(-1; 3]$, ветви вниз. Вершина $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Нули -1 и 3 . Точка $(-1; 0)$ выколота, точка $(3; 0)$ закрашена. Ещё точки: $(0; 3)$, $(2; 3)$.
3. **Прямая** $y = x - 3$ при $x > 3$: $x = 4, 5$ даёт $y = 1, 2$. Точка $(3; 0)$ здесь выколота, но принадлежит параболе, поэтому на графике закрашена.
4. **Считаем точки.** $m > 4$: только прямая, 1 точка. $m = 4$: гипербола, вершина, прямая, 3 точки. $0 < m < 4$: $1 + 2 + 1 = 4$ точки. $m = 0$: парабола в точке $x = 3$ ($x = -1$ выколота), 1 точка. $m < 0$: точек нет.



Ответ: $m = 0$; $m > 4$.

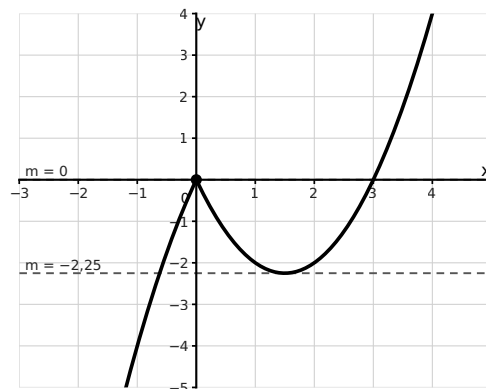
Проверка. При $m = 0$: $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = 3$ или $x = -1$; $x = -1$ не входит в промежуток $(-1; 3]$, значит точка одна. Гипербола и прямая при $m = 0$ значений 0 не принимают.

Ловушка. При $m = 0$ посчитать две точки пересечения с параболой ($x = -1$ выколота). При $m = 4$ забыть про гипербола и получить две точки вместо трёх. Для этой задачи важно, что $(-1; 4)$ закрашена.

Задача 3. Модуль, прямая $y = m$

Условие. Постройте график функции $y = x|x| - 3|x|$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

1. **Раскрываем модуль.** При $x \geq 0$: $|x| = x$, $y = x^2 - 3x$. При $x < 0$: $|x| = -x$, $y = -x^2 + 3x$.
2. **Правый кусок** ($x \geq 0$): парабола, ветви вверх, нули 0 и 3, вершина $(1,5; -2,25)$. Точки: $(1; -2)$, $(2; -2)$, $(4; 4)$.
3. **Левый кусок** ($x < 0$): ветви вниз, вершина $x_0 = 1,5$ лежит правее промежутка, значит слева функция возрастает и $y < 0$. Точки: $(-1; -4)$, $(-2; -10)$.
4. **Считаем точки.** $m > 0$: 1 точка (только справа). $m = 0$: $x = 0$ и $x = 3$, 2 точки. $-2,25 < m < 0$: справа 2, слева 1, всего 3. $m = -2,25$: справа 1, слева 1, всего 2. $m < -2,25$: 1 точка.



Ответ: $m = -2,25$; $m = 0$.

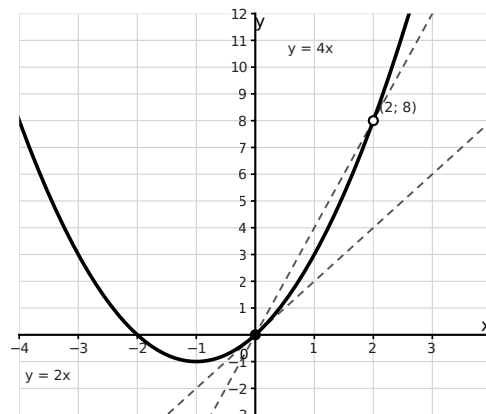
Проверка. $m = 0$: $x|x| - 3|x| = |x|(x - 3) = 0$, $x = 0$ или $x = 3$. $m = -2,25$: справа $x = 1,5$; слева $-x^2 + 3x = -2,25$, откуда $x^2 - 3x - 2,25 = 0$ и подходит $x = (3 - 3\sqrt{2})/2 < 0$.

Ловушка. Считать график симметричным (как у $y = x^2 - 3|x|$). Здесь $x|x|$ нечётная функция, левая часть — другая парабола.

Задача 4. Дробь, прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 4x}{x - 2}$. Определите, при каких k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Область определения:** $x \neq 2$.
2. **Сокращение:** $x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$, поэтому $y = x(x + 2) = x^2 + 2x$ при $x \neq 2$. Выколота точка $(2; 8)$.
3. **Парабола**, ветви вверх, вершина $(-1; -1)$, нули -2 и 0 . Точки: $(-3; 3)$, $(1; 3)$, $(-2; 0)$, $(0; 0)$.
4. **Прямая $y = kx$ проходит через $(0; 0)$** , а эта точка принадлежит графику. Значит одна общая точка есть всегда, нужно, чтобы вторых не было.
5. $x^2 + 2x = kx$, то есть $x(x + 2 - k) = 0$: $x = 0$ или $x = k - 2$. Вторая точка исчезает, если она совпадает с первой ($k - 2 = 0$, $k = 2$, прямая касается параболы) или выколота ($k - 2 = 2$, $k = 4$, прямая проходит через $(2; 8)$).



Ответ: $k = 2$; $k = 4$.

Проверка. $k = 2$: $x^2 = 0$, единственный корень $x = 0$. $k = 4$: $x^2 - 2x = 0$, $x = 0$ или $x = 2$, а $x = 2$ выколота.

Ловушка. Найти только $k = 4$ («прямая через выколотую точку») и забыть касание в начале координат ($k = 2$), либо забыть, что $(0; 0)$ всегда на графике.

Задача 5. Дробь с модулем

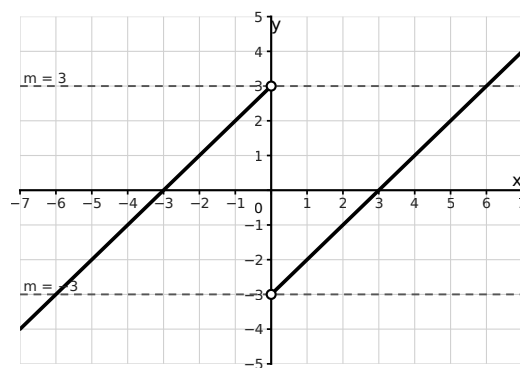
Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 3|x|}{x}$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. **Область определения:** $x \neq 0$.
2. **Раскрываем модуль.** При $x > 0$: $|x| = x$, $y = (x^2 - 3x)/x = x - 3$. При $x < 0$: $|x| = -x$, $y = (x^2 + 3x)/x = x + 3$.
3. **График — два луча.** Левый: $y = x + 3$ при $x < 0$, конец $(0; 3)$ выколота. Правый: $y = x - 3$ при $x > 0$, конец $(0; -3)$ выколота. Точки: $(-3; 0)$, $(-1; 2)$, $(1; -2)$, $(3; 0)$.
4. **Значения.** Левый луч принимает все значения $y < 3$, правый — все $y > -3$.
5. **Считаем точки.** $m \leq -3$: подходит только левый луч, 1 точка (при $m = -3$ правая точка $x = 0$ выколота). $-3 < m < 3$: два луча, 2 точки. $m \geq 3$: только правый луч, 1 точка (при $m = 3$ левая точка $x = 0$ выколота).

Ответ: $m \leq -3$ или $m \geq 3$, то есть $m \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Проверка. $m = 3$: левая ветвь даёт $x = 0$, она выколота; правая даёт $x = 6$, значит одна точка. $m = -3$: левая даёт $x = -6$, правая $x = 0$ (выколота), одна точка.

Ловушка. Не включить граничные $m = -3$ и $m = 3$ (в ответе « $m < -3$ или $m > 3$ »), хотя в них одна из точек выколота и общая точка остаётся одна.



Памятка: как решать и оформлять задание 22

Один лист А4. Алгоритм и оформление, чтобы эксперт увидел верный график и не снял баллы.

Алгоритм решения

1. **Прочитай вопрос.** Прямая $y = m$ или $y = kx$? Сколько нужно общих точек: 0, 1, 2, 3?
2. **Область определения.** Если есть дробь: знаменатель $\neq 0$. Записать запрещённые x до сокращения.
3. **Упрости.** Разложи на множители и сократи; раскрой модули по промежуткам; для кусочной функции выпиши куски с промежутками.
4. **Определи вид каждого куска:** прямая, парабола, гипербола. Отметь у каждой границы: строго или нет.
5. **Таблица точек.** Вершина ($x_0 = -b/(2a)$), нули, концы кусков, по 2–3 точки с каждой стороны.
6. **Построй график.** Выколотые точки пустым кружком, закрашенные — чёрным.
7. **Двигай прямую.** Найди особые положения: вершины, концы кусков, выколотые точки, касание (для $y = kx$).
8. **Проверь особые значения подстановкой.** Запиши ответ отдельной строкой.

Как оформить, чтобы не потерять баллы

- Оси подписаны (x , y), начало координат отмечено, единичный отрезок — клетка или 2 клетки, одинаковый на всех участках оси.
- Построение по линейке и от руки гладко: парабола — плавная кривая, не ломаная; ветви гиперболы не пересекают оси.
- Выколотые точки именно выколоты; закрашенные граничные точки закрашены.
- Рядом с каждым куском подпиши формулу (или номер куска).
- Рядом с графиком запиши таблицу точек и вершину: эксперту видно, откуда взяты точки.
- Пунктирные линии $y = m$ (или $y = kx$) подпиши.
- Ответ — отдельной строкой: «Ответ: $m = \dots$ ». Перечисли все значения; промежуток запиши скобками.

Критерий (ФИПИ, задание 22)

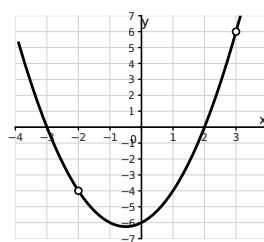
Балл	Что должно быть
2	график построен верно и верно найдены значения параметра (m или k)
1	график построен верно, но значения параметра найдены неверно или не найдены
0	остальные случаи

Вывод: без верного графика ответ не засчитывают. Сначала график, потом параметр.

Типичные потери баллов

1. Потеряны выколотые точки: область определения не найдена до сокращения.
2. Вершина параболы посчитана неверно (чаще всего ошибка со знаком).
3. Строгое неравенство заменено на нестрогое: точка закрашена там, где нужна выколотая.
4. Потеряны особые m : вершина, выколотые точки, концы кусков.
5. Ответ — «промежуток» вместо перечня значений либо наоборот.
6. Для $y = kx$ забыта прямая через выколотую точку или касание.

Образец оформления (задача 1 из разбора)



ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq -2$.

Сокращение: $y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$.

Вершина: $(-0,5; -6,25)$.

Нули: -3 ; 2 .

Выколоты: $(-2; -4)$, $(3; 6)$.

Ответ: $m = -6,25$; $m = -4$; $m = 6$.

Зачётный лист · график функции (3 уровня)

Разноуровневая итоговая работа по заданию 22. Печать: 2 листа А4. Для задач 5–8 нужны клетчатая бумага и линейка.

Фамилия, имя: _____ Дата: _____ Время: 60 минут. Калькулятор не используется.

Уровень 1 · базовый

1. Найдите координаты вершины и нули функции $y = x^2 - 4x - 5$.

[illegible]

Ответ:

2. Запишите функцию $y = 2|x| - x$ без знака модуля отдельно для $x \geq 0$ и для $x < 0$.

[illegible]

Ответ:

3. Сократите дробь в формуле $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ и укажите координаты выколотой точки.

[illegible]

Ответ:

4. Функция задана формулой

$$\begin{cases} y = x + 4, & \text{если } x < -1 \\ y = x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 2 \\ y = 4/x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Найдите $f(-3)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$.

[illegible]

Ответ: _____

Уровень 2 · как в экзамене

5. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x - 1)(x + 2)}$.

Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

[illegible]

Ответ:

6. Постройте график функции $y = \frac{x^2 - 4|x|}{x}$.

Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

A blank sheet of graph paper with a grid pattern. The grid consists of small squares formed by thin gray lines. There are 20 columns and 15 rows of squares. A thicker vertical line runs down the left side, creating a margin. A thicker horizontal line runs across the top, creating a header space.

Ответ:

Уровень 3 · повышенный

7. Постройте график функции

$$\begin{cases} y = -x^2 - 4x, & \text{если } x \leq 0 \\ y = x^2 - 4x, & \text{если } 0 < x \leq 4 \\ y = x - 4, & \text{если } x > 4 \end{cases}$$

Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ:

8. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 17x^2 + 16}{(x - 4)(x + 1)}$.

Определите, при каком значении k прямая $y = kx$ не имеет с графиком общих точек.

A blank sheet of graph paper with a grid pattern. The grid consists of small squares, typical of standard graph paper used for mathematics or engineering. There are no markings, numbers, or text on the page.

Ответ:

Ответы и ключ (отрезать до раздачи).

1. Вершина (2; -9), нули -1 и 5. **2.** $x \geq 0$: $y = x$; $x < 0$: $y = -3x$. **3.** $y = x + 5$ при $x \neq 5$; выколота (5; 10). **4.** $f(-3) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(4) = 1$.

5. Сокращение: $(x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$, $y = (x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$, $x \neq 1$, $x \neq -2$. Вершина (0,5; -2,25), выколоты (1; -2) и (-2; 4). Ответ: $m = -2,25$; $m = -2$; $m = 4$.

6. $x > 0$: $y = x - 4$; $x < 0$: $y = x + 4$; выколоты (0; -4) и (0; 4). Ответ: $m \leq -4$ или $m \geq 4$.

7. Левая парабола: вершина (-2; 4), (0; 0) закрашена; средняя: вершина (2; -4), (0; 0) выколота, (4; 0) закрашена; правый луч от (4; 0) выколотой. Три точки при $-4 < m < 4$. Ответ: (-4; 4). При $m = \pm 4$ две точки.

8. Сокращение: $y = (x - 1)(x + 4) = x^2 + 3x - 4$, $x \neq 4$, $x \neq -1$. Выколоты (4; 24) и (-1; -6): обе на прямой $y = 6x$. Уравнение $x^2 + (3 - k)x - 4 = 0$ при $k = 6$ имеет корни 4 и -1, оба выколоты. Ответ: $k = 6$.

Оценивание (предложение, не официальная шкала). Уровень 1: по 1 баллу за задание (до 4). Уровни 2 и 3: по 2 балла за задание по критерию ФИПИ: верный график и верные значения — 2 балла, верный график, значения неверны — 1 балл. Всего 12. Оценка «5»: 11-12; «4»: 9-10; «3»: 6-8; «2»: меньше 6.

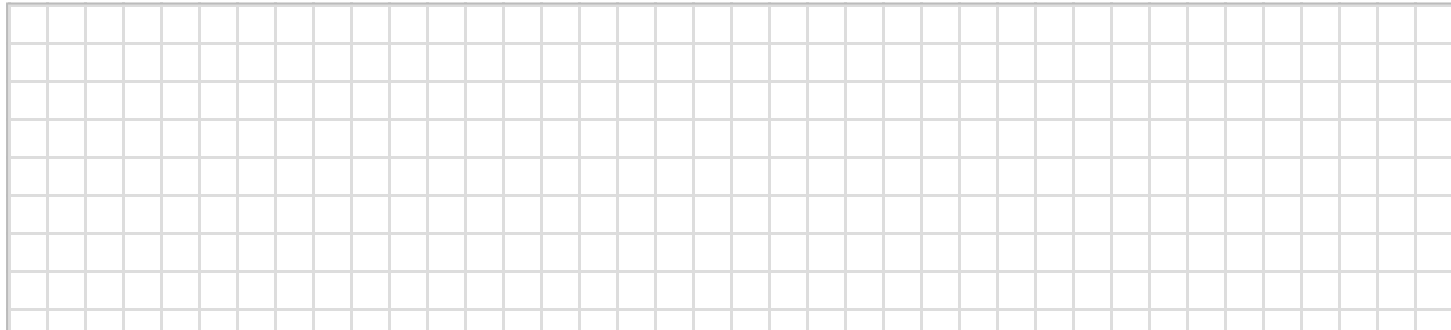
Домашняя карточка · график функции (4 задачи)

Задание 22 ОГЭ. Печать: 1 лист А4 с заданиями; ответы для проверки — на втором листе, печатать только учителю.

Фамилия, имя: _____ Дата сдачи: _____

Решайте по алгоритму из памятки: область определения, упрощение, таблица точек, график, особые значения. Оформляйте график так, как показано в памятке.

1. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{(x - 1)(x + 3)}$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

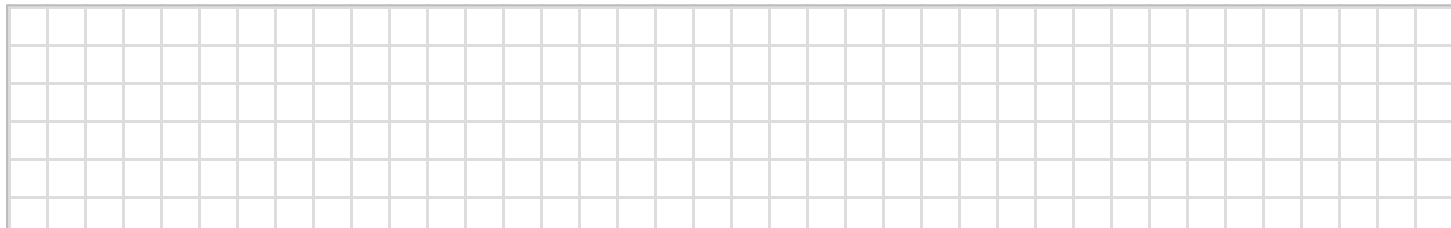


Ответ: _____

2. Постройте график функции

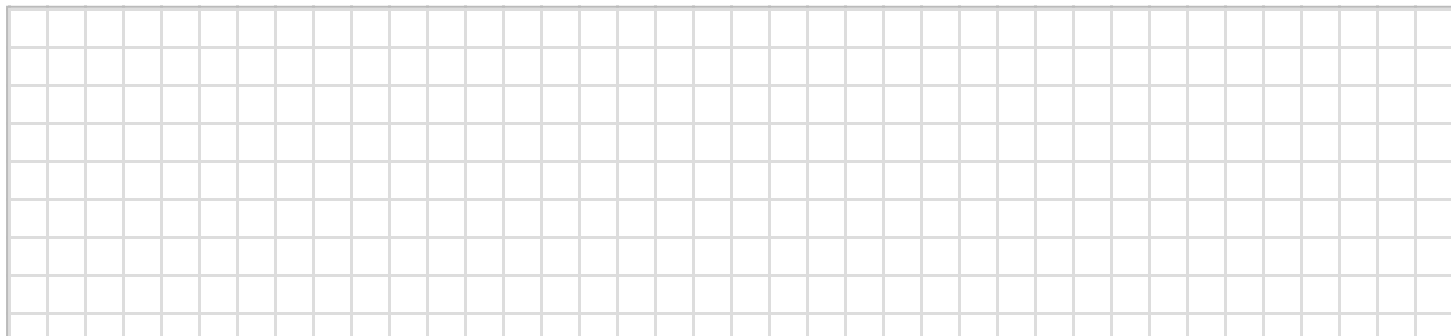
$$\begin{cases} y = -8/x, & \text{если } x \leq -2 \\ y = x^2, & \text{если } -2 < x \leq 2 \\ y = 6 - x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.



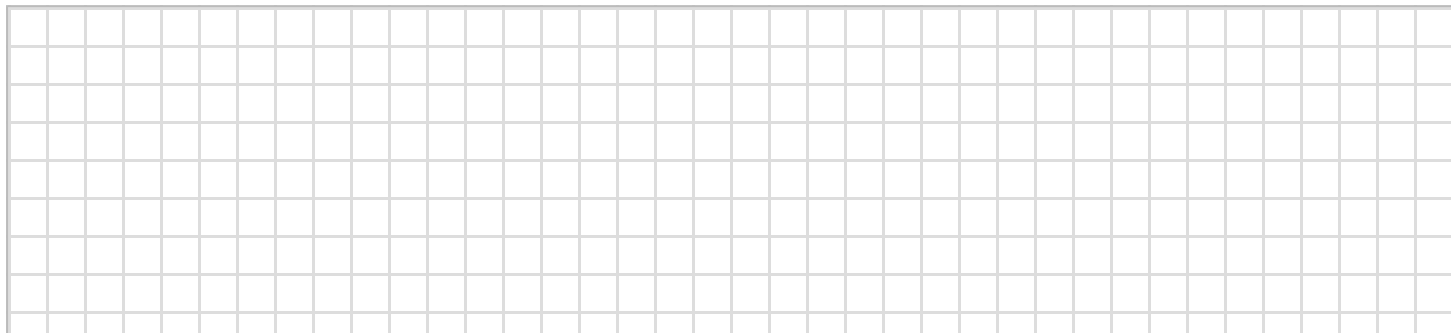
Ответ: _____

3. Постройте график функции $y = x|x| - 4|x|$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.



Ответ: _____

4. Постройте график функции $y = \frac{x^3 - 9x}{x - 3}$. Определите, при каких k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



Ответ: _____

Ответы и ключевые точки для проверки (отрезать).

1. **Ответ: $m = 12$.** ОДЗ: $x \neq 1, x \neq -3$. $(x^2 - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$, после сокращения $y = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$. Вершина $(1; -4)$ выколота! Выколоты $(1; -4)$ и $(-3; 12)$. При $m = -4$ точек нет, при $m = 12$ уравнение $x^2 - 2x - 15 = 0$ даёт $x = 5$ и $x = -3$ (выколота), остаётся одна. Ловушка: ответ « $m = -4$ ».
2. **Ответ: $m = 0$; $m = 4$.** Гипербола $y = -8/x$ на $x \leq -2$: значения от 0 (не достигается) до 4, точка $(-2; 4)$ закрашена. Парабола $y = x^2$ на $(-2; 2]$: $(-2; 4)$ выколота, $(2; 4)$ закрашена, вершина $(0; 0)$. Луч $y = 6 - x$ на $x > 2$: $(2; 4)$ выколота. При $0 < m < 4$ — четыре точки, при $m < 0$ — одна, при $m = 0$ ($x = 0$ и $x = 6$) и $m = 4$ ($x = -2$ и $x = 2$) — по две.
3. **Ответ: $-4 < m < 0$.** При $x \geq 0$: $y = x^2 - 4x$, вершина $(2; -4)$. При $x < 0$: $y = -x^2 + 4x$, функция возрастает, $y < 0$. $m = 0$ и $m = -4$: по две точки; $m > 0$ или $m < -4$: одна.
4. **Ответ: $k = 3$; $k = 6$.** Сокращение: $y = x(x + 3) = x^2 + 3x, x \neq 3$, выколота $(3; 18)$. Прямая $y = kx$ проходит через $(0; 0)$, уравнение $x(x + 3 - k) = 0$. Один корень при $k = 3$ (касание в начале координат) и при $k = 6$ (второй корень $x = 3$ выколот).

Построение графика кусочной функции (задание 22 ОГЭ)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель».

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, часть 2, задание 22: построить график функции и найти значения параметра m или k , при которых прямая имеет с графиком заданное число общих точек). Пять задач повышенной сложности: 1–5.

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. В каждой задаче есть вопрос «откуда это берётся» и ветка с типичной ошибкой. Для самостоятельного решения после каждой задачи указана похожая задача из домашней карточки или зачётного листа. Печать: 2 колонки, шрифт 9 pt, экономия бумаги.

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → памятка → зачётный лист → домашняя карточка.

Часть 1. Общий алгоритм (один раз для всех пяти задач)

Учитель: Открой любое задание 22. Что мы видим?

Ученик: Дана формула функции: кусочная, с дробью или с модулем. Надо построить график и найти, при каких m (или k) прямая $y = m$ (или $y = kx$) имеет с графиком ровно одну, две или три общие точки.

Учитель: Что проверяет эксперт и сколько это стоит?

Ученик: Два балла. Нужен верный график и верные значения параметра. Если график верный, а значения неверные, будет один балл. Если график неверный, ответ не засчитают.

Учитель: Что такое кусочно-заданная функция и как строят её график?

Ученик: Это функция, которая на разных промежутках задана разными формулами. Каждую формулу строю только на своём промежутке. На границе точку закрашиваю при нестрогом неравенстве ($\leq$, $\geq$) и выкалываю при строгом ($<$, $>$).

Учитель: Верно, так и в учебнике. Откуда берётся выколота точка у дробь?

Ученик: Из знаменателя. На ноль делить нельзя, поэтому значения x , при которых знаменатель равен нулю, в график не входят. Это нужно записать до сокращения, потому что после сокращения запрет уже не виден.

Учитель: Как найти ординату выколота точки?

Ученик: Подставить её абсциссу в сокращённую формулу.

Учитель: Назови шаги решения до того, как мы начнём считать.

Ученик: Найти область определения. Упростить: разложить на множители и сократить, раскрыть модули. Определить вид каждого куска. Составить таблицу точек. Построить график. Подвигать прямую и проверить особые значения.

Учитель: Фиксируем алгоритм:

1. Прочитать вопрос: прямая $y = m$ или $y = kx$, сколько точек.
2. Найти область определения (знаменатель $\neq 0$) до сокращения.
3. Упростить: разложить на множители и сократить, раскрыть модули на промежутках.
4. Определить вид каждого куска (прямая, парабола, гипербола) и границы (строго или нет).
5. Составить таблицу: вершина, нули, концы кусков, точки с обеих сторон; построить график, выколота точки пустым кружком.
6. Двигать прямую, найти особые положения (вершины, концы кусков, выколота точки, касание), проверить их подстановкой, записать ответ.

Часть 2. Пять задач

Задача 1. Дробь с выколотыми точками, прямая $y = m$

Условие. Постройте график функции $y = (x^4 - 13x^2 + 36)/((x - 3)(x + 2))$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Дробь. Вверху многочлен четвёртой степени, внизу произведение двух скобок. Нужна прямая $y = m$ и ровно одна общая точка.

Учитель: Что делаем первым, ещё до преобразований?

Ученик: Область определения: знаменатель не равен нулю.

Учитель: Откуда берутся запрещённые значения?

Ученик: $(x - 3)(x + 2) = 0$, когда $x = 3$ или $x = -2$. Значит, $x \neq 3$ и $x \neq -2$.

Учитель: Как разложить числитель $x^4 - 13x^2 + 36$?

Ученик: Это квадратный трёхчлен относительно x^2 . Замена $t = x^2$: $t^2 - 13t + 36 = 0$. По теореме Виета корни 4 и 9, значит $t^2 - 13t + 36 = (t - 4)(t - 9) = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

Учитель: Что дальше с каждой скобкой?

Ученик: Разность квадратов: $(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)$.

Учитель: Что можно сократить?

Ученик: Скобки $(x - 3)$ и $(x + 2)$ есть и в числителе, и в знаменателе. Остаётся $y = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$.

Учитель: Какой это график и что на нём особенного?

Ученик: Парабола, ветви вверх. Но точки с $x = 3$ и $x = -2$ выколота.

Учитель: Как найти ординаты выколотых точек?

Ученик: Подставить в сокращённую формулу. При $x = 3$: $9 + 3 - 6 = 6$. При $x = -2$: $4 - 2 - 6 = -4$. Точки (3; 6) и (-2; -4) выколота.

Учитель: Найди вершину и нули.

Ученик: $x_0 = -b/(2a) = -1/2$, $y_0 = 0,25 - 0,5 - 6 = -6,25$. Нули из $(x - 2)(x + 3) = 0$: $x = 2$ и $x = -3$.

Учитель: Двигаем прямую $y = m$ снизу вверх. Сколько точек ниже вершины и в вершине?

Ученик: Ниже вершины ни одной. В вершине, при $m = -6,25$, одна.

Если ученик ответит: «Выше вершины всегда две точки, значит ответ только $m = -6,25$ ». **Учитель:** Проверь уровни $y = -4$ и $y = 6$. Какие x дают такие значения и все ли они есть на графике? **Ученик:** При $y = -4$: $x^2 + x - 2 = 0$, $x = 1$ или $x = -2$, но $x = -2$ выколота, остаётся одна точка. При $y = 6$: $x^2 + x - 12 = 0$, $x = 3$ или $x = -4$, но $x = 3$ выколота, остаётся одна. Значит, нужно добавить -4 и 6 .

Учитель: Какой итоговый ответ?

Ученик: $m = -6,25$; $m = -4$; $m = 6$.

Учитель: Как записать в бланк №2 и как проверить?

Ученик: Под графиком строка «Ответ: $-6,25$; -4 ; 6 », выколота точки на графике пустые. Проверка: подставить каждое m в уравнение и убедиться, что запрещённый x отсеялся.

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: Дробь, в знаменателе скобки с линейными множителями, в числителе многочлен, который раскладывается. Тогда будут выколота точки.

Для самостоятельного решения: задача 1 домашней карточки.

Задача 2. Кусочная функция с гиперболой

Условие. Постройте график функции $y = -4/x$ при $x \leq -1$; $y = -x^2 + 2x + 3$ при $-1 < x \leq 3$; $y = x - 3$ при $x > 3$.

Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Кусочная функция из трёх формул: гипербола, парабола, прямая. Нужна одна общая точка с $y = m$.

Учитель: Начнём с первого куска. В какой четверти ветвь гиперболы $y = -4/x$ при $x \leq -1$?

Ученик: x отрицательный, $k = -4$ отрицательное, значит y положительный. Это вторая четверть.

Учитель: Какие точки возьмём?

Ученик: $x = -1$; $y = 4$; $x = -2$; $y = 2$; $x = -4$; $y = 1$; $x = -8$; $y = 0,5$. Точка $(-1; 4)$ закрашена, потому что $x \leq -1$ нестрогое неравенство.

Учитель: Теперь парабола на $(-1; 3]$. Где вершина?

Ученик: $x_0 = -b/(2a) = -2/(2 \cdot (-1)) = 1$, $y_0 = -1 + 2 + 3 = 4$. Ветви вниз, потому что $a = -1$.

Учитель: Нули и граничные точки?

Ученик: $-x^2 + 2x + 3 = 0$, то есть $x^2 - 2x - 3 = 0$, корни -1 и 3 . Точка $(-1; 0)$ выколота, потому что $-1 < x$ (строго). Точка $(3; 0)$ закрашена, потому что $x \leq 3$.

Учитель: Что с третьим куском, лучом $y = x - 3$ при $x > 3$?

Ученик: Точка $(3; 0)$ для луча выколота, но она принадлежит параболе и там закрашена. Значит, на графике она есть. Ещё точки: $(4; 1)$, $(5; 2)$.

Учитель: Почему это важно?

Ученик: Если бы я выколол $(3; 0)$ совсем, то при $m = 0$ точки бы не было. А она есть, значит при $m = 0$ общая точка существует.

Учитель: Считаем точки. Сколько при $m > 4$?

Ученик: Гипербола не выше 4, парабола не выше 4, значит только луч: одна точка.

Учитель: При $m = 4$?

Ученик: Гипербола в точке $x = -1$, вершина параболы $x = 1$ и луч $x = 7$. Три точки.

Учитель: При $0 < m < 4$?

Ученик: Гипербола одна, парабола две, луч одна: четыре точки.

Учитель: При $m = 0$ и при $m < 0$?

Если ученик ответит: «При $m = 0$ парабола даёт две точки, $x = -1$ и $x = 3$ ». **Учитель:** Принадлежит ли $x = -1$ промежутку $(-1; 3]$? **Ученик:** Нет, неравенство строгое. Остаётся только $x = 3$. Гипербола и луч значения 0 не принимают. Значит, одна точка.

Ученик: При $m < 0$ точек нет.

Учитель: Итоговый ответ?

Ученик: $m = 0$ или $m > 4$.

Учитель: Какую ошибку здесь делают чаще всего?

Ученик: При $m = 4$ забывают про гиперболу и пишут две точки. А при $m = 0$ не замечают, что точка $(-1; 0)$ выколота.

Для самостоятельного решения: задача 2 домашней карточки.

Задача 3. Модуль, прямая $y = m$

Условие. Постройте график функции $y = x|x| - 3|x|$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Формула с модулем. Её нельзя строить сразу, нужно раскрыть модуль на промежутках.

Учитель: Откуда берутся промежутки?

Ученик: Модуль зависит от знака x : $|x| = x$ при $x \geq 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$. Граница промежутков $x = 0$.

Учитель: Что получится при $x \geq 0$?

Ученик: $y = x \cdot x - 3x = x^2 - 3x$.

Учитель: А при $x < 0$?

Ученик: $|x| = -x$, поэтому $x|x| = x \cdot (-x) = -x^2$, а $-3|x| = 3x$. Получается $y = -x^2 + 3x$.

Учитель: Опиши правый кусок.

Ученик: Парабола $y = x^2 - 3x$, ветви вверх. Вершина $x_0 = 3/2 = 1,5$, $y_0 = 2,25 - 4,5 = -2,25$. Нули 0 и 3. Точки $(1; -2)$, $(2; -2)$, $(4; 4)$.

Учитель: Теперь левый кусок на $x < 0$. Где вершина параболы $y = -x^2 + 3x$?

Ученик: $x_0 = -3/(2 \cdot (-1)) = 1,5$. Но это правее нуля, то есть вне промежутка $x < 0$.

Учитель: Что это значит для графика слева?

Ученик: На $x < 0$ функция возрастает и принимает отрицательные значения: $(-1; -4)$, $(-2; -10)$, приближается к $(0; 0)$.

Учитель: Сколько точек при $m > 0$?

Ученик: Слева значения отрицательные, справа парабола уходит вверх: одна точка.

Учитель: При $m = 0$?

Ученик: $|x|(x - 3) = 0$, $x = 0$ или $x = 3$. Две точки.

Учитель: При $-2,25 < m < 0$?

Ученик: Справа две точки, слева одна: три.

Учитель: При $m = -2,25$ и при $m < -2,25$?

Если ученик ответит: «График симметричный, как у $y = x^2 - 3|x|$, поэтому при $m = -2,25$ точек две справа и две слева». **Учитель:** Какая формула у левого куска и где у неё вершина? **Ученик:** $y = -x^2 + 3x$, вершина при $x = 1,5$, вне промежутка. Значит, левый кусок не симметричен правому: слева одна точка при каждом $m < 0$.

Ученик: При $m = -2,25$: справа одна точка (вершина), слева одна: всего две. При $m < -2,25$: одна точка слева.

Учитель: Ответ?

Ученик: $m = -2,25$ и $m = 0$.

Для самостоятельного решения: задача 3 домашней карточки.

Задача 4. Дробь, прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = (x^3 - 4x)/(x - 2)$. Определите, при каких k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Учитель: Что мы видим и чем это отличается от задач 1-3?

Ученик: Дробь, как в задаче 1. Но прямая $y = kx$, а не $y = m$: она проходит через начало координат и вращается.

Учитель: Область определения?

Ученик: $x - 2 \neq 0$, то есть $x \neq 2$.

Учитель: Как упростить числитель?

Ученик: Вынести x : $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$. После сокращения на $(x - 2)$: $y = x(x + 2) = x^2 + 2x$ при $x \neq 2$.

Учитель: Что выколото?

Ученик: Точка с абсциссой 2: $y(2) = 4 + 4 = 8$, значит $(2; 8)$.

Учитель: Вершина и нули параболы?

Ученик: $x_0 = -2/2 = -1$, $y_0 = 1 - 2 = -1$. Нули -2 и 0 .

Учитель: Какая точка лежит и на графике, и на каждой прямой $y = kx$?

Ученик: Начало координат $(0; 0)$: $x = 0$ в области определения, $y(0) = 0$, и прямая $y = kx$ при $x = 0$ даёт 0.

Учитель: Что тогда нужно, чтобы общая точка была ровно одна?

Ученик: Чтобы других общих точек не было.

Учитель: Как найти все общие точки?

Ученик: Решить $x^2 + 2x = kx$. Переносу: $x^2 + (2 - k)x = 0$, то есть $x(x + 2 - k) = 0$. Корни $x = 0$ и $x = k - 2$.

Учитель: Когда второго корня «нет»?

Ученик: Первый случай: $k - 2 = 0$, то есть $k = 2$: оба корня совпали, прямая касается параболы в начале координат. Второй случай: $k - 2 = 2$, то есть $k = 4$: второй корень равен выколотой абсциссе.

Если ученик ответит: «Только $k = 4$, прямая проходит через выколотую точку». **Учитель:** Что получится при $k = 2$? Реши уравнение. **Ученик:** $x^2 + 2x = 2x$, $x^2 = 0$, единственный корень $x = 0$. Одна общая точка, значит $k = 2$ тоже подходит.

Учитель: Ответ?

Ученик: $k = 2$; $k = 4$.

Учитель: Проверка?

Ученик: $k = 4$: $x^2 - 2x = 0$, $x = 0$ или $x = 2$, но $x = 2$ выколот. Одна точка.

Для самостоятельного решения: задача 4 домашней карточки.

Задача 5. Дробь с модулем

Условие. Постройте график функции $y = (x^2 - 3|x|)/x$. Определите, при каких m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Дробь и модуль одновременно. Область определения $x \neq 0$, а модуль надо раскрыть.

Учитель: Как раскрываем и откуда берётся результат?

Ученик: При $x > 0$: $|x| = x$, $y = (x^2 - 3x)/x = x - 3$. При $x < 0$: $|x| = -x$, $y = (x^2 + 3x)/x = x + 3$.

Учитель: Как выглядит график?

Ученик: Два луча. Левый $y = x + 3$ при $x < 0$ с выколотым концом $(0; 3)$. Правый $y = x - 3$ при $x > 0$ с выколотым концом $(0; -3)$.

Учитель: Какие значения принимает левый луч и какие правый?

Ученик: Левый принимает все $y < 3$, правый все $y > -3$.

Учитель: Сколько точек при $-3 < m < 3$?

Ученик: Оба луча дают значение m : две точки.

Учитель: При $m = 3$ и $m > 3$?

Ученик: Левый луч значения 3 не достигает (конец выколот), остаётся правый луч: одна точка. При $m > 3$ тоже одна, только правый.

Учитель: А при $m = -3$ и $m < -3$?

Если ученик ответит: «Граничные $m = \pm 3$ не берём, ответ $m < -3$ или $m > 3$ ». **Учитель:** Сколько общих точек у прямой $y = 3$? Реши уравнения для каждого луча. **Ученик:** Левый: $x + 3 = 3$, $x = 0$, но $x = 0$ не входит. Правый: $x - 3 = 3$, $x = 6$. Значит, одна точка: $m = 3$ подходит. Так же $m = -3$: левый $x = -6$, правый $x = 0$ выколот, одна точка.

Учитель: Ответ?

Ученик: $m \leq -3$ или $m \geq 3$.

Учитель: Можно ли решить быстрее?

Ученик: Заметить, что это сдвинутые лучи: ответ читается по ординатам выколотых концов, границы входят в ответ.

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: Модуль в числителе и x в знаменателе: после раскрытия получатся два луча с выколотыми концами на оси Oy .

Для самостоятельного решения: задача 6 зачётного листа.

Часть 3. Что откуда берётся (шпаргалка к диалогу)

- Запрещённые значения x — из знаменателя исходной дроби, до сокращения.
- Выколотая точка: абсцисса из знаменателя, ордината из сокращённой формулы.
- Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$: $x_0 = -b/(2a)$, $y_0 = y(x_0)$.

- Нули функции — корни уравнения $y = 0$ (теорема Виета или дискриминант).
- Модуль: $|a| = a$ при $a \geq 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$; промежутки задаёт ноль выражения под модулем.
- Граничная точка куска: закрашена при $\leq$ и $\geq$, выколота при $<$ и $>$; если на границе два значения, отмечают обе точки.
- Особые m — уровни вершин, концов кусков и выколотых точек; их проверяют подстановкой.
- Прямая $y = kx$ проходит через $(0; 0)$; особые k — касание и прямая через выколотую точку.

Часть 4. План урока (индивидуальный, 60 минут)

Время	Этап	Что делаем
0-5	Вход	Устный опрос по теории: вершина параболы, выколотая точка, раскрытие модуля. Три-четыре вопроса из списка.
5-15	Мини-теория	Ученик сам формулирует определение кусочной функции и шаги алгоритма. На доске простой пример $y = (x^2 - 4)/(x - 2)$: область определения, сокращение, выколотая точка.
15-30	Разбор в диалоге	Задачи 1 и 2 (трек А: 1 и 3). Учитель задаёт вопросы, ученик строит график на доске.
30-45	Самостоятельно	Задача 3 или 5. Подсказки по лесенке: сначала вопрос, затем наводящий вопрос, затем прямая подсказка. Потом совместная проверка.
45-55	Пятиминутка	Вариант А (трек А, В) или Б (трек С), 5-7 минут, самопроверка по ключу.
55-60	Итог	Ученик называет признаки заданий, ловушки и значения параметров. Задание на дом.

Индивидуально: трек А — больше мелких вопросов в таблице точек; трек С — ученик сам называет алгоритм целиком, добавляется задача 4 (прямая $y = kx$) и вопрос «Можно ли решить быстрее?».

Часть 5. План домашней работы

День	Задание	Время
1	Прочитать теорию, пройти интерактивный тест (10 вопросов)	15 мин
2	Задачи 1 и 2 домашней карточки, оформлять по памятке	25 мин
3	Тренажёр с новыми числами (5-6 заданий) и задача 3 карточки	25 мин
4	Задача 4 карточки, проверка по ключевым точкам, исправление ошибок	20 мин
Перед занятием	Уровень 1 зачётного листа (4 задания) без подсказок	15 мин

Правило: сначала график и таблица точек, потом ответ; проверку по ключу делать только после решения.