

Графики функций: теория и устный опрос

Задания 11 и 22 ОГЭ (22 — часть 2, 2 балла). Печать: 2 листа А4 теории и лист устного опроса. Определения и правила записаны близко к школьному учебнику (алгебра, 9 класс).

1. Функция и её график

Функцией называется зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y . Переменную x называют независимой переменной (аргументом), переменную y — зависимой переменной (значением функции).

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Точка $(x_0; y_0)$ лежит на графике, если при подстановке получается верное равенство $y_0 = f(x_0)$. **Нули функции** — значения x , при которых $y = 0$ (точки пересечения с осью Ox). Значение функции при $x = 0$ — точка пересечения с осью Oy . **Область определения** — все значения x , при которых формула имеет смысл (знаменатель не равен нулю).

2. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа. Графиком линейной функции является прямая.

- k — угловой коэффициент: при $k > 0$ функция возрастает (график идёт вверх слева направо), при $k < 0$ убывает.
- b — ордината точки пересечения с осью Oy : точка $(0; b)$. При $b = 0$ получаем $y = kx$ — прямую, проходящую через начало координат.
- Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.
- Строят по двум точкам. Прямая через $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ имеет $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Квадратичная функция

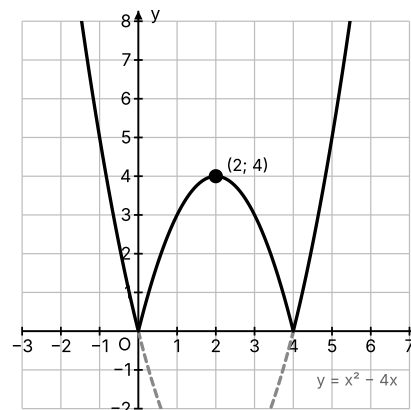
Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$. Графиком является парабола.

Что смотрим	Как находим
Ветви	$a > 0$ — вверх, $a < 0$ — вниз
Вершина	$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$
Ось симметрии	прямая $x = x_0$

5. Модуль и графики с модулем

Модулем числа x называется само число x , если $x \geq 0$, и противоположное ему число $-x$, если $x < 0$. $|x| = x$ при $x \geq 0$; $|x| = -x$ при $x < 0$.

- $y = |f(x)|$. Часть графика $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox (и на ней), остаётся; часть ниже оси Ox отражается симметрично относительно оси Ox вверх.
- $y = f(|x|)$. Правая часть ($x \geq 0$) остаётся, левая — её симметричное отражение относительно оси Oy . Функция чётная.
- Модуль вместе с x** (например, $y = x|x| - 2|x|$). Раскрываем модуль отдельно при $x \geq 0$ и при $x < 0$, получаем две формулы и строим каждую только на своём промежутке.



$y = |x^2 - 4x|$: пунктир — часть исходной параболы, которая отражена

6. Кусочно заданная функция

Функция может быть задана разными формулами на разных промежутках изменения аргумента. Каждую формулу строят только на её промежутке.

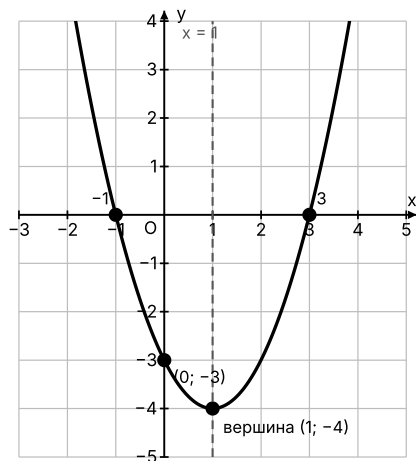
Если неравенство строгое ($<$, $>$), конец промежутка не принадлежит этому куску: рисуем **выколотую** точку (пустой кружок). Если нестрогое ($\leq$, $\geq$), точка принадлежит графику: рисуем закрашенную. На стыке значения кусков могут не совпадать (разрыв).

7. Дробь и выколотая точка

- Разложить числитель и знаменатель на множители.
- До сокращения** записать, при каких x знаменатель равен нулю: эти значения не входят в область определения.
- Сократить дробь.
- Построить график получившейся функции.
- Точки с исключёнными абсциссами выколоть; их ординаты найти по сокращённой формуле.

Пересечение с Оу	точка (0; c)
Нули	корни $ax^2 + bx + c = 0$: при $D > 0$ два, при $D = 0$ один (парабола касается Ох), при $D < 0$ нет
Наименьшее / наибольшее значение	$a > 0$ — наименьшее y_0 ; $a < 0$ — наибольшее y_0

Если $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, вершина сразу видна: $(x_0; y_0)$. От вершины при $a = 1$: на 1 вправо и влево — вверх на 1, на 2 — на 4, на 3 — на 9.



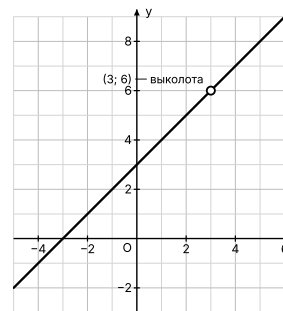
$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

4. Обратная пропорциональность

Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называется **обратной пропорциональностью**. Область определения — все числа, кроме 0. Графиком является гипербола.

При $k > 0$ ветви лежат в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV. Оси координат — асимптоты: график к ним приближается, но не пересекает. Для любой точки графика $xy = k$.

Пример. $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$ при $x \neq 3$. График — прямая $y = x + 3$ без точки (3; 6).

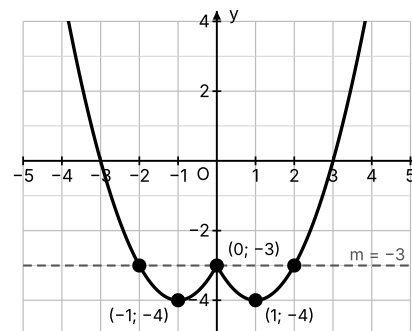


8. Прямые $y = m$ и $y = kx$: общие точки

Число общих точек графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = m$ равно числу решений уравнения $f(x) = m$.

$y = m$ — горизонтальная прямая. Двигаем её снизу вверх и считаем общие точки. Число точек меняется только в особых положениях: на уровне вершин, концов кусков (закрашенных и выколотых точек), выколотых точек. Каждое такое m проверяем отдельно. В ответ — значения m и промежутки (строгие и нестрогие неравенства).

$y = kx$ — прямая через начало координат; вращаем её вокруг О. Особые положения: прямая проходит через выколотую точку $(x_0; y_0)$, тогда $k = \frac{y_0}{x_0}$; $k = 0$ (ось Ох); касание ($D = 0$).



$y = x^2 - 2|x| - 3$: прямая $y = -3$ имеет ровно три общие точки

9. Задание 11: соответствие графиков и формул

- $y = kx + b$: $k > 0$ — вверх, $k < 0$ — вниз; $b > 0$ — пересекает Оу выше О, $b < 0$ — ниже.
- $y = ax^2 + bx + c$: $a > 0$ — ветви вверх; c — точка пересечения с Оу; знак b определяют по вершине $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- $y = \frac{k}{x}$: $k > 0$ — I и III четверти, $k < 0$ — II и IV.
- Сначала определяем вид графика (прямая, парабола, гипербола), затем знаки; каждый признак исключает варианты. Ответ — цифры подряд без пробелов в порядке А, Б, В.

Вопросы для устного опроса (с ответами)

Ученику читают вопрос, ответ закрыт. Ответ «примерно» засчитывается, если сохранён смысл правила.
Для 5-минутного опроса: вопросы 1, 6, 11, 14, 16.

№	Вопрос	Ответ
1	Что называется функцией?	Зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y .
2	Что называется графиком функции?	Множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.
3	Как проверить, лежит ли точка $(2; -1)$ на графике $y = x - 3$?	Подставить: $-1 = 2 - 3$, равенство верно, точка лежит на графике.
4	Что такое нули функции и как их найти?	Значения x , при которых $y = 0$. Решить уравнение $f(x) = 0$; это точки пересечения с осью Ox .
5	Что показывают k и b в формуле $y = kx + b$?	k — угловой коэффициент (при $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ убывает); b — ордината точки пересечения с осью Oy .
6	Как найти вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$?	$x_0 = -b/(2a)$, затем $y_0 = y(x_0)$.
7	От чего зависит направление ветвей параболы?	От знака коэффициента a : при $a > 0$ вверх, при $a < 0$ вниз.
8	Сколько нулей у квадратичной функции и от чего это зависит?	Два, один или ни одного — по знаку дискриминанта: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.
9	Где расположена гипербола $y = k/x$ при $k < 0$?	Во II и IV четвертях.
10	Что называется модулем числа?	Само число, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, если оно отрицательно.
11	Как из графика $y = f(x)$ получить график $y = f(x) $?	Часть графика ниже оси Ox отразить симметрично относительно оси Ox вверх; остальное оставить.
12	Как из графика $y = f(x)$ получить график $y = f(x)$?	Правую часть ($x \geq 0$) оставить, левую получить симметричным отражением правой относительно оси Oy .
13	Как строить график функции с $ x $?	Раскрыть модуль отдельно при $x \geq 0$ и при $x < 0$; каждую получившуюся формулу строить только на своём промежутке.
14	Что такое выколота точка и когда она появляется?	Точка, не принадлежащая графику. Появляется там, где знаменатель исходной дроби равен нулю, и на конце промежутка при строгом неравенстве.
15	Как найти ординату выколотой точки?	Подставить её абсциссу в сокращённую формулу.
16	Чему равно число общих точек графика и прямой $y = m$?	Числу решений уравнения $f(x) = m$. Прямую двигают снизу вверх и считают точки; особые значения m проверяют отдельно.
17	Чем отличаются прямые $y = m$ и $y = kx$?	$y = m$ горизонтальна; $y = kx$ проходит через начало координат.
18	Как найти k , при котором прямая $y = kx$ проходит через точку $(x_0; y_0)$?	$k = y_0/x_0$ (при $x_0 \neq 0$).
19	Как записать ответ в задании 22?	Перечислить значения параметра и промежутки, проверив каждый конец (строгое или нестрогое неравенство).

Типичные ошибки (на что смотреть)

- Парабола или гипербола нарисована «от руки» без таблицы значений и без вершины.
- При $x \geq 0$ и $x < 0$ обе формулы построены целиком, а не на своих промежутках.
- Выколотые точки не отмечены или поставлены по неупрощённой формуле.
- Особые значения m или k не проверены отдельно, берутся «на глаз».
- В ответе потеряна граница промежутка (строгое и нестрогое неравенство перепутаны).