

Разбор 5 задач повышенной сложности · графики функций (№22)

Каждая задача: условие, что видим, правило, алгоритм, решение с таблицей и рисунком, проверка, ответ и типичная ловушка. Задание 22 — часть 2 (бланк №2), 2 балла: оценивается и график, и найденные значения параметра.

Задача 1. Раскрытие модуля: две параболы

Условие. Постройте график функции $y = x|x| - 2|x| - 4x$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Что видим. Функция с модулем, умноженным на x . Модуль нужно раскрыть: получатся две формулы — для $x \geq 0$ и для $x < 0$, то есть график составлен из частей двух парабол. Прямая $y = m$ горизонтальна; нужно найти m , при которых общих точек ровно две.

Правило. Модуль числа: $|x| = x$ при $x \geq 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$. Число общих точек графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = m$ равно числу решений уравнения $f(x) = m$.

Алгоритм.

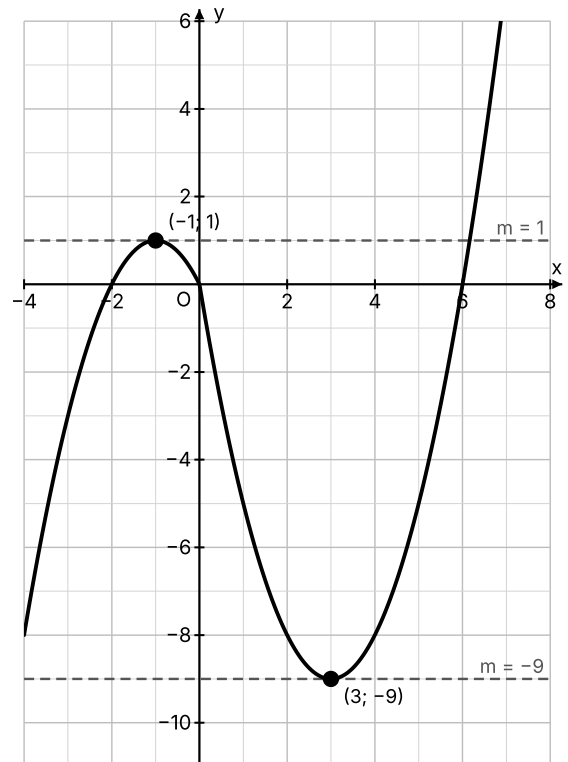
1. Раскрыть модуль отдельно при $x \geq 0$ и при $x < 0$.
2. Каждую формулу привести к виду $a(x - x_0)^2 + y_0$ и построить на своём промежутке.
3. Двигать прямую $y = m$ снизу вверх, считать общие точки.
4. Проверить особые значения m (ординаты вершин) отдельно.
5. Записать ответ.

Решение.

1. При $x \geq 0$: $|x| = x$, поэтому $y = x^2 - 2x - 4x = x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$. Парабола, ветви вверх, вершина $(3; -9)$, нули 0 и 6. Строим при $x \geq 0$.
2. При $x < 0$: $|x| = -x$, поэтому $y = -x^2 + 2x - 4x = -x^2 - 2x = -(x + 1)^2 + 1$. Парабола, ветви вниз, вершина $(-1; 1)$, нули -2 и 0. Строим при $x < 0$ (точка $(0; 0)$ уже есть у первой части).
3. Таблица значений:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-3	0	1	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

4. Двигаем прямую $y = m$ снизу вверх. При $m < -9$ — одна точка (левая часть); при $m = -9$ — две (вершина правой части и точка левой); при $-9 < m < 1$ — три; при $m = 1$ — две (вершина левой части и точка правой); при $m > 1$ — одна (правая ветвь).



Штриховые линии — особые положения прямой

Проверка. $m = 1$: левая часть даёт вершину $(-1; 1)$, правая — уравнение $x^2 - 6x = 1$ с корнями разных знаков (произведение корней $-1 < 0$), подходит один положительный: всего две точки. $m = -9$: правая часть — вершина $(3; -9)$; в левой части уравнение $x^2 + 2x - 9 = 0$ имеет один отрицательный корень: всего две точки.

Ответ: $m = -9$; $m = 1$.

Ловушка. Строят обе параболы целиком, а не на своих промежутках. Теряют одну из двух вершин. Считают, что при $m = 0$ точек две; на самом деле их три: $(-2; 0)$, $(0; 0)$ и $(6; 0)$.

Задача 2. Дробь: сокращение и выколотые точки

Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 20x^2 + 64}{(x - 2)(x + 4)}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Что видим. Дробь: в числителе многочлен четвёртой степени без нечётных степеней, в знаменателе произведение двух скобок. Нужно разложить числитель, сократить и построить параболу с двумя выколотыми точками. Значения m , при которых одна из двух точек пересечения выколота, дают ровно одну общую точку.

Правило. Дробь определена, когда знаменатель не равен нулю; область определения записывают до сокращения. Дробь можно сократить на общий множитель: значения исходной и сокращённой функций совпадают везде, кроме точек, где знаменатель исходной дроби равен нулю.

Алгоритм.

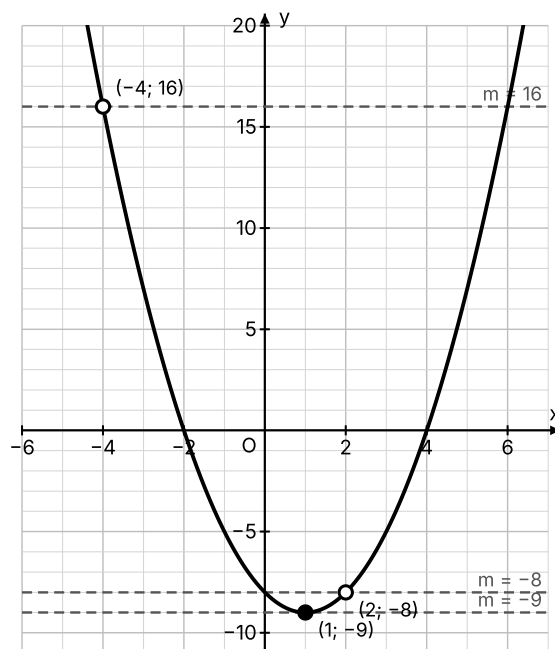
1. Записать область определения (знаменатель не равен нулю).
2. Разложить числитель на множители и сократить дробь.
3. Построить параболу и выколоть точки с исключёнными абсциссами.
4. Найти m : вершина и значения, при которых одна из двух общих точек выколота.
5. Записать ответ.

Решение.

1. Область определения: $(x - 2)(x + 4) \neq 0$, то есть $x \neq 2$ и $x \neq -4$.
2. Числитель: пусть $t = x^2$, тогда $t^2 - 20t + 64 = 0$, $t = 4$ или $t = 16$. Значит, $x^4 - 20x^2 + 64 = (x^2 - 4)(x^2 - 16) = (x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 4)$.
3. Сокращаем на $(x - 2)(x + 4)$: $y = (x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$, где $x \neq 2$, $x \neq -4$.
4. Парабола, ветви вверх, вершина $(1; -9)$, нули -2 и 4 , точка $(0; -8)$. Выколотые точки находим по сокращённой формуле: при $x = 2$ получаем $y = -8$, при $x = -4$ получаем $y = 16$. Выколоты $(2; -8)$ и $(-4; 16)$.
5. Таблица (звёздочка — выколотая точка):

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	27	(16)*	7	0	-5	-8	-9	(-8)*	-5	0	7	16

6. Прямая $y = m$: при $m < -9$ общих точек нет; при $m = -9$ — одна (вершина); при $m > -9$ — две точки $x = 1 \pm \sqrt{m + 9}$. Но одна из двух точек может оказаться выколотой. Если $m = -8$, корни $x = 2$ (выколота) и $x = 0$: остаётся одна точка. Если $m = 16$, корни $x = -4$ (выколота) и $x = 6$: тоже одна.



Штриховые линии — особые положения прямой

Проверка. $m = -8$: $x^2 - 2x - 8 = -8$, корни 2 и 0 ; первый выколот, второй допустим. $m = 16$: корни -4 и 6 ; первый выколот. Вершина не выколота (1 не равно 2 и -4).

Ответ: $m = -9$; $m = -8$; $m = 16$.

Ловушка. Записывают только $m = -9$. Не замечают, что выколотая точка забирает одну из двух общих точек. Считают ординаты выколотых точек по неупрощённой формуле (там получается $0/0$). Путают знак абсциссы при $x = -4$.

Задача 3. Гипербола с модулем и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = \frac{2|x| - 1}{|x| - 2x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Что видим. Дробь с модулем; знаменатель раскладывается на множители. Прямая $y = kx$ проходит через начало координат. Нужно найти k , при которых общих точек нет.

Правило. Модуль: $|x| = x$ при $x \geq 0$, $|x| = -x$ при $x < 0$; кроме того, $x^2 = |x|^2$. Область определения записывают до сокращения; после сокращения точки, не входящие в область определения, выкалывают.

Алгоритм.

1. Записать область определения.
2. Раскрыть модуль, сократить, построить две ветви гиперболы.
3. Выколоть точки и найти их координаты.
4. Провести $y = kx$ через начало координат: рассмотреть $k = 0$, $k > 0$, $k < 0$.
5. Найти k , при которых единственная общая точка выколота.
6. Записать ответ.

Решение.

1. Область определения: $|x| - 2x^2 = |x|(1 - 2|x|) \neq 0$, то есть $x \neq 0$ и $x \neq \pm \frac{1}{2}$.
2. Числитель $2|x| - 1 = -(1 - 2|x|)$. Сокращаем на $(1 - 2|x|)$: $y = -\frac{1}{|x|}$.
3. При $x > 0$: $y = -\frac{1}{x}$ (гипербола в IV четверти); при $x < 0$: $y = \frac{1}{x}$ (в III четверти). График симметричен относительно оси Oy. Выколоты точки с $x = \pm \frac{1}{2}$: $y = -2$, то есть $(0,5; -2)$ и $(-0,5; -2)$.
4. Таблица для $x > 0$ (левая часть симметрична):

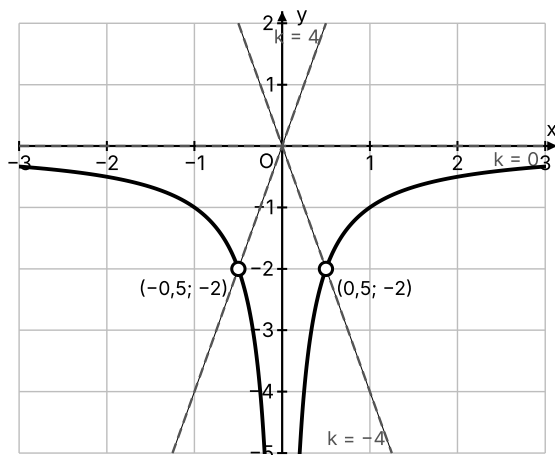
$x > 0$	0,25	0,5	1	2	4
y	-4	$(-2)^*$	-1	-0,5	-0,25

5. Прямая $y = kx$. При $k = 0$ это ось Ox: весь график лежит ниже оси ($y < 0$), общих точек нет. При $k > 0$ прямая проходит по I и III четвертям, общую точку может иметь только левая ветвь: $kx = \frac{1}{x}$, $x^2 = \frac{1}{k}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{k}}$ — одна точка. Она выколота, если $x = -\frac{1}{2}$, то есть $k = 4$: тогда общих точек нет. При $k < 0$ общую точку может иметь только правая ветвь: $x = \frac{1}{\sqrt{-k}}$; она выколота при $k = -4$.

Проверка. $k = 4$: прямая $y = 4x$ проходит через $(-0,5; -2)$: $4 \cdot (-0,5) = -2$, и это единственная её точка пересечения с графиком. Симметрично для $k = -4$.

Ответ: $k = -4$; $k = 0$; $k = 4$.

Ловушка. Теряют $k = 0$. Берут только положительные k . Не замечают, что единственная общая точка выколота. Путают «нет общих точек» и «одна общая точка».



Штриховые линии — особые положения прямой

Задача 4. Кусочная функция: выколотая и закрашенная точки

Условие. Постройте график функции $y = \begin{cases} 3 - x & \text{при } x < 1 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Что видим. Кусочная функция: на каждом промежутке своя формула, в точке $x = 1$ график разрывается. Нужно аккуратно обращаться с концами: выколотый и закрашенный.

Правило. Каждую формулу строят только на своём промежутке. При строгом неравенстве ($<$, $>$) конец промежутка выкалывают, при нестрогом ($\leq$, $\geq$) точка принадлежит графику.

Алгоритм.

1. Построить каждую формулу на своём промежутке.
2. Определить, какие концы выколоты, какие закрашены; найти их ординаты.
3. Двигать прямую $y = m$, считать точки на каждом промежутке и в особых значениях.
4. Записать ответ с учётом строгих и нестрогих неравенств.

Решение.

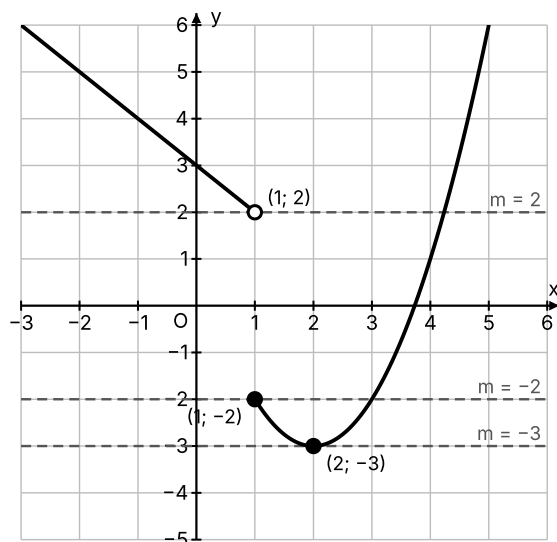
1. При $x < 1$: $y = 3 - x$ — прямая, убывает. Если подставить $x = 1$, получится 2, но $x < 1$ строго, поэтому точка $(1; 2)$ выколота. На этой части $y > 2$.

x	-1	0	0,5	1
y	4	3	2,5	(2)*

2. При $x \geq 1$: $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$. Парабола, вершина $(2; -3)$ входит в эту часть ($2 \geq 1$). Точка $(1; -2)$ принадлежит графику (закрашена).

x	1	2	3	4	5
y	-2	-3	-2	1	6

3. Двигаем прямую $y = m$. При $m < -3$ точек нет; при $m = -3$ — одна (вершина); при $-3 < m \leq -2$ — две (оба корня $x = 2 \pm \sqrt{m + 3}$ не меньше 1); при $-2 < m \leq 2$ — одна (только правая ветвь параболы; прямая такие значения не принимает); при $m > 2$ — две (парабола и прямая).



Штриховые линии — особые положения прямой

Проверка. $m = -2$: уравнение $(x - 2)^2 - 3 = -2$ даёт $x = 1$ и $x = 3$, оба принадлежат участку $x \geq 1$: две точки, значит $m = -2$ не подходит. $m = 2$: прямая в точку $(1; 2)$ не попадает (выколота), остаётся одна точка параболы: подходит.

Ответ: $m = -3$ и $-2 < m \leq 2$.

Ловушка. Включают $m = -2$ (там две точки). Не включают $m = 2$ («выколота точка не считается», значит значение подходит). Теряют вершину $m = -3$.

Задача 5. Модуль квадратного трёхчлена и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Что видим. Модуль квадратного трёхчлена (часть параболы ниже оси Ox отражается вверх) и прямая через начало координат. Точка $O(0; 0)$ принадлежит графику, значит, прямая $y = kx$ всегда имеет с графиком общую точку O . Для «ровно одной» нужно, чтобы других общих точек не было.

Правило. График $y = |f(x)|$: часть графика $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox , остаётся, часть ниже оси Ox отражается симметрично относительно оси Ox . Число общих точек графика и прямой равно числу решений уравнения $f(x) = kx$.

Алгоритм.

1. Построить $y = x^2 - 4x$ и отразить часть ниже оси Ox вверх.
2. Заметить, что $O(0; 0)$ принадлежит графику при любом k .
3. Решить $f(x) = kx$ на каждом участке, отобрать допустимые корни.
4. Посчитать общие точки при разных k ; записать ответ.

Решение.

1. $y = x^2 - 4x = x(x - 4)$ — парабола с нулями 0 и 4, вершина (2; -4). При $0 < x < 4$ значения отрицательны, эту часть отражаем вверх: $y = -x^2 + 4x$, вершина (2; 4). При $x \leq 0$ и при $x \geq 4$ график — часть исходной параболы $y = x^2 - 4x$.

2. Таблица значений:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	12	5	0	3	4	3	0	5	12

3. Решаем $f(x) = kx$ на каждом участке. При $x \leq 0$ и при $x \geq 4$: $x^2 - 4x = kx$, $x(x - 4 - k) = 0$, откуда $x = 0$ или $x = 4 + k$. При $0 < x < 4$: $-x^2 + 4x = kx$, откуда $x = 4 - k$.

Корень $x = 0$ даёт точку O при любом k .

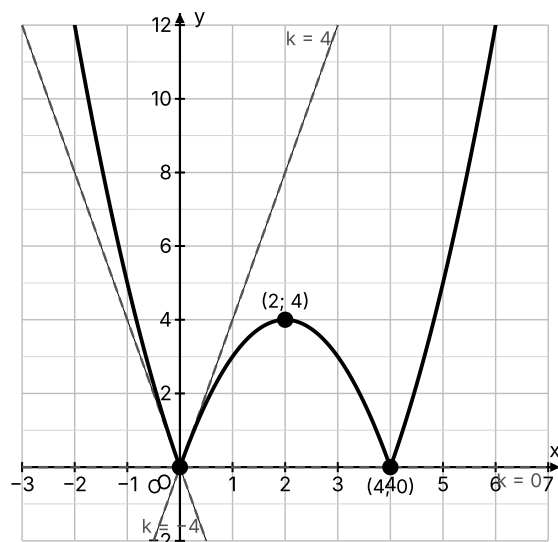
4. Какие корни допустимы. $x = 4 + k$ подходит, если $k + 4 < 0$, то есть $k < -4$ (на левой части), или если $k + 4 \geq 4$, то есть $k \geq 0$ (на правой части). $x = 4 - k$ подходит, если $0 < 4 - k < 4$, то есть $0 < k < 4$.

5. Считаем общие точки: $k < -4$ — две (O и ещё одна); $-4 \leq k < 0$ — одна (только O); $k = 0$ — две (O и (4; 0)); $0 < k < 4$ — три (O и две других); $k \geq 4$ — две.

Проверка. $k = -4$: при $x \leq 0$ имеем $x^2 - 4x = -4x$, $x^2 = 0$, $x = 0$; на остальных участках корней нет. Общая точка одна — O. $k = 0$: прямая $y = 0$ пересекает график в точках (0; 0) и (4; 0): две точки.

Ответ: $-4 \leq k < 0$.

Ловушка. Забывают, что O всегда принадлежит графику. Включают $k = 0$ (там две точки: O и (4; 0)). Не включают $k = -4$ (общая точка одна — O).



Штриховые линии — особые положения прямой

Ответы. 1) $m = -9$; $m = 1$ · 2) $m = -9$; $m = -8$; $m = 16$ · 3) $k = -4$; $k = 0$; $k = 4$ · 4) $m = -3$ и $-2 < m \leq 2$ · 5) $-4 \leq k < 0$.