

Графики функций: теория и устный опрос

Задания 11 и 22 ОГЭ (22 — часть 2, 2 балла). Печать: 2 листа А4 теории и лист устного опроса. Определения и правила записаны близко к школьному учебнику (алгебра, 9 класс).

1. Функция и её график

Функцией называется зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y . Переменную x называют независимой переменной (аргументом), переменную y — зависимой переменной (значением функции).

Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

Точка $(x_0; y_0)$ лежит на графике, если при подстановке получается верное равенство $y_0 = f(x_0)$. **Нули функции** — значения x , при которых $y = 0$ (точки пересечения с осью Ox). Значение функции при $x = 0$ — точка пересечения с осью Oy . **Область определения** — все значения x , при которых формула имеет смысл (знаменатель не равен нулю).

2. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа. Графиком линейной функции является прямая.

- k — угловой коэффициент: при $k > 0$ функция возрастает (график идёт вверх слева направо), при $k < 0$ убывает.
- b — ордината точки пересечения с осью Oy : точка $(0; b)$. При $b = 0$ получаем $y = kx$ — прямую, проходящую через начало координат.
- Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.
- Строят по двум точкам. Прямая через $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ имеет $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

3. Квадратичная функция

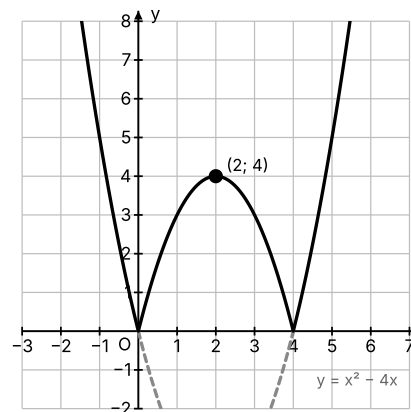
Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа, $a \neq 0$. Графиком является парабола.

Что смотрим	Как находим
Ветви	$a > 0$ — вверх, $a < 0$ — вниз
Вершина	$x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$
Ось симметрии	прямая $x = x_0$

5. Модуль и графики с модулем

Модулем числа x называется само число x , если $x \geq 0$, и противоположное ему число $-x$, если $x < 0$. $|x| = x$ при $x \geq 0$; $|x| = -x$ при $x < 0$.

- $y = |f(x)|$. Часть графика $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox (и на ней), остаётся; часть ниже оси Ox отражается симметрично относительно оси Ox вверх.
- $y = f(|x|)$. Правая часть ($x \geq 0$) остаётся, левая — её симметричное отражение относительно оси Oy . Функция чётная.
- Модуль вместе с x** (например, $y = x|x| - 2|x|$). Раскрываем модуль отдельно при $x \geq 0$ и при $x < 0$, получаем две формулы и строим каждую только на своём промежутке.



$y = |x^2 - 4x|$: пунктир — часть исходной параболы, которая отражена

6. Кусочно заданная функция

Функция может быть задана разными формулами на разных промежутках изменения аргумента. Каждую формулу строят только на её промежутке.

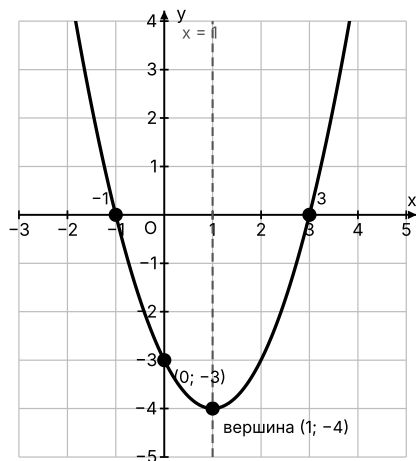
Если неравенство строгое ($<$, $>$), конец промежутка не принадлежит этому куску: рисуем **выколотую** точку (пустой кружок). Если нестрогое ($\leq$, $\geq$), точка принадлежит графику: рисуем закрашенную. На стыке значения кусков могут не совпадать (разрыв).

7. Дробь и выколотая точка

- Разложить числитель и знаменатель на множители.
- До сокращения** записать, при каких x знаменатель равен нулю: эти значения не входят в область определения.
- Сократить дробь.
- Построить график получившейся функции.
- Точки с исключёнными абсциссами выколоть; их ординаты найти по сокращённой формуле.

Пересечение с Оу	точка (0; c)
Нули	корни $ax^2 + bx + c = 0$: при $D > 0$ два, при $D = 0$ один (парабола касается Ох), при $D < 0$ нет
Наименьшее / наибольшее значение	$a > 0$ — наименьшее y_0 ; $a < 0$ — наибольшее y_0

Если $y = a(x - x_0)^2 + y_0$, вершина сразу видна: $(x_0; y_0)$. От вершины при $a = 1$: на 1 вправо и влево — вверх на 1, на 2 — на 4, на 3 — на 9.



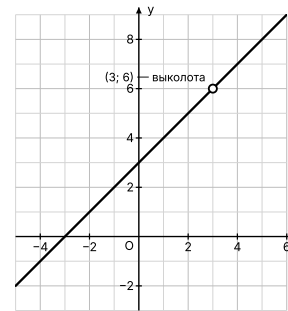
$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

4. Обратная пропорциональность

Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называется **обратной пропорциональностью**. Область определения — все числа, кроме 0. Графиком является гипербола.

При $k > 0$ ветви лежат в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV. Оси координат — асимптоты: график к ним приближается, но не пересекает. Для любой точки графика $xy = k$.

Пример. $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$ при $x \neq 3$. График — прямая $y = x + 3$ без точки (3; 6).

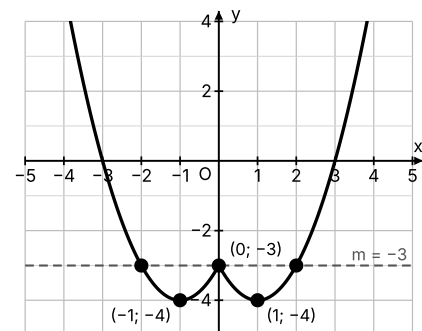


8. Прямые $y = m$ и $y = kx$: общие точки

Число общих точек графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = m$ равно числу решений уравнения $f(x) = m$.

$y = m$ — горизонтальная прямая. Двигаем её снизу вверх и считаем общие точки. Число точек меняется только в особых положениях: на уровне вершин, концов кусков (закрашенных и выколотых точек), выколотых точек. Каждое такое m проверяем отдельно. В ответ — значения m и промежутки (строгие и нестрогие неравенства).

$y = kx$ — прямая через начало координат; вращаем её вокруг О. Особые положения: прямая проходит через выколотую точку $(x_0; y_0)$, тогда $k = \frac{y_0}{x_0}$; $k = 0$ (ось Ох); касание ($D = 0$).



$y = x^2 - 2|x| - 3$: прямая $y = -3$ имеет ровно три общие точки

9. Задание 11: соответствие графиков и формул

- $y = kx + b$: $k > 0$ — вверх, $k < 0$ — вниз; $b > 0$ — пересекает Оу выше О, $b < 0$ — ниже.
- $y = ax^2 + bx + c$: $a > 0$ — ветви вверх; c — точка пересечения с Оу; знак b определяют по вершине $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- $y = \frac{k}{x}$: $k > 0$ — I и III четверти, $k < 0$ — II и IV.
- Сначала определяем вид графика (прямая, парабола, гипербола), затем знаки; каждый признак исключает варианты. Ответ — цифры подряд без пробелов в порядке А, Б, В.

Вопросы для устного опроса (с ответами)

Ученику читают вопрос, ответ закрыт. Ответ «примерно» засчитывается, если сохранён смысл правила.
Для 5-минутного опроса: вопросы 1, 6, 11, 14, 16.

№	Вопрос	Ответ
1	Что называется функцией?	Зависимость переменной y от переменной x , при которой каждому значению x соответствует единственное значение y .
2	Что называется графиком функции?	Множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.
3	Как проверить, лежит ли точка $(2; -1)$ на графике $y = x - 3$?	Подставить: $-1 = 2 - 3$, равенство верно, точка лежит на графике.
4	Что такое нули функции и как их найти?	Значения x , при которых $y = 0$. Решить уравнение $f(x) = 0$; это точки пересечения с осью Ox .
5	Что показывают k и b в формуле $y = kx + b$?	k — угловой коэффициент (при $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ убывает); b — ордината точки пересечения с осью Oy .
6	Как найти вершину параболы $y = ax^2 + bx + c$?	$x_0 = -b/(2a)$, затем $y_0 = y(x_0)$.
7	От чего зависит направление ветвей параболы?	От знака коэффициента a : при $a > 0$ вверх, при $a < 0$ вниз.
8	Сколько нулей у квадратичной функции и от чего это зависит?	Два, один или ни одного — по знаку дискриминанта: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.
9	Где расположена гипербола $y = k/x$ при $k < 0$?	Во II и IV четвертях.
10	Что называется модулем числа?	Само число, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, если оно отрицательно.
11	Как из графика $y = f(x)$ получить график $y = f(x) $?	Часть графика ниже оси Ox отразить симметрично относительно оси Ox вверх; остальное оставить.
12	Как из графика $y = f(x)$ получить график $y = f(x)$?	Правую часть ($x \geq 0$) оставить, левую получить симметричным отражением правой относительно оси Oy .
13	Как строить график функции с $ x $?	Раскрыть модуль отдельно при $x \geq 0$ и при $x < 0$; каждую получившуюся формулу строить только на своём промежутке.
14	Что такое выколота точка и когда она появляется?	Точка, не принадлежащая графику. Появляется там, где знаменатель исходной дроби равен нулю, и на конце промежутка при строгом неравенстве.
15	Как найти ординату выколотой точки?	Подставить её абсциссу в сокращённую формулу.
16	Чему равно число общих точек графика и прямой $y = m$?	Числу решений уравнения $f(x) = m$. Прямую двигают снизу вверх и считают точки; особые значения m проверяют отдельно.
17	Чем отличаются прямые $y = m$ и $y = kx$?	$y = m$ горизонтальна; $y = kx$ проходит через начало координат.
18	Как найти k , при котором прямая $y = kx$ проходит через точку $(x_0; y_0)$?	$k = y_0/x_0$ (при $x_0 \neq 0$).
19	Как записать ответ в задании 22?	Перечислить значения параметра и промежутки, проверив каждый конец (строгое или нестрогое неравенство).

Типичные ошибки (на что смотреть)

- Парабола или гипербола нарисована «от руки» без таблицы значений и без вершины.
- При $x \geq 0$ и $x < 0$ обе формулы построены целиком, а не на своих промежутках.
- Выколотые точки не отмечены или поставлены по неупрощённой формуле.
- Особые значения m или k не проверены отдельно, берутся «на глаз».
- В ответе потеряна граница промежутка (строгое и нестрогое неравенство перепутаны).

Карточки-пятиминутки · графики функций

Два варианта на одном листе А4: вырезать по пунктирной линии. 5 заданий по 1 баллу. «5» — 5 баллов, «4» — 4 балла, «3» — 3 балла.

Вариант А

Фамилия: _____ Время: 7 минут.
Запишите решение и ответ.

1. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 2x - 6$ с осями координат.

[illegible]

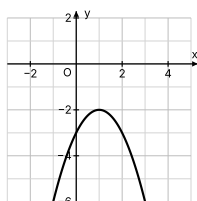
Ответ: _____

2. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 - 6x + 8$ и нули функции.

[illegible]

Ответ:

3. На рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a и c .

[illegible]

Ответ:

4. Упростите $y = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$ и найдите координаты выколотой точки графика.

[illegible]

Ответ:

5. Сколько решений имеет уравнение $|x^2 - 4| = 3$? (Постройте график $y = |x^2 - 4|$.)

[illegible]

Ответ:

Вариант Б

Фамилия: _____ Время: 7 минут.
Запишите решение и ответ.

1. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = -3x + 9$ с осями координат.

[illegible]

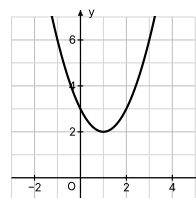
Ответ:

2. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 - 4x - 5$ и нули функции.

[illegible]

Ответ:

3. На рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a и c .

[illegible]

Ответ:

4. Упростите $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ и найдите координаты выколотой точки графика.

[illegible]

Ответ:

5. Сколько решений имеет уравнение $|x^2 - 4| = 4$? (Постройте график $y = |x^2 - 4|$.)

[illegible]

Ответ:

Ответы (для учителя). Виды заданий: 1 — пересечение с осями; 2 — вершина и нули; 3 — знаки a и c по рисунку (№11); 4 — сокращение дроби, выколота точка; 5 — число общих точек графика с горизонтальной прямой (график с модулем).

№	Вариант А	Вариант Б
1	(3; 0) и (0; −6)	(3; 0) и (0; 9)
2	вершина (3; −1); нули 2 и 4	вершина (2; −9); нули −1 и 5
3	$a < 0$, $c < 0$ (ветви вниз, пересечение с Оу ниже О)	$a > 0$, $c > 0$ (ветви вверх, пересечение с Оу выше О)
4	$y = x - 5$, выколота (−5; −10)	$y = x + 2$, выколота (2; 4)
5	4 решения ($y = 3$ ниже вершины «горба» $y = 4$ при $x = 0$)	3 решения ($y = 4$ проходит через вершину «горба»: $x = 0$, $x = \pm 2\sqrt{2}$)

Разбор 5 задач повышенной сложности · графики функций (№22)

Каждая задача: условие, что видим, правило, алгоритм, решение с таблицей и рисунком, проверка, ответ и типичная ловушка. Задание 22 — часть 2 (бланк №2), 2 балла: оценивается и график, и найденные значения параметра.

Задача 1. Раскрытие модуля: две параболы

Условие. Постройте график функции $y = x|x| - 2|x| - 4x$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Что видим. Функция с модулем, умноженным на x . Модуль нужно раскрыть: получатся две формулы — для $x \geq 0$ и для $x < 0$, то есть график составлен из частей двух парабол. Прямая $y = m$ горизонтальна; нужно найти m , при которых общих точек ровно две.

Правило. Модуль числа: $|x| = x$ при $x \geq 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$. Число общих точек графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = m$ равно числу решений уравнения $f(x) = m$.

Алгоритм.

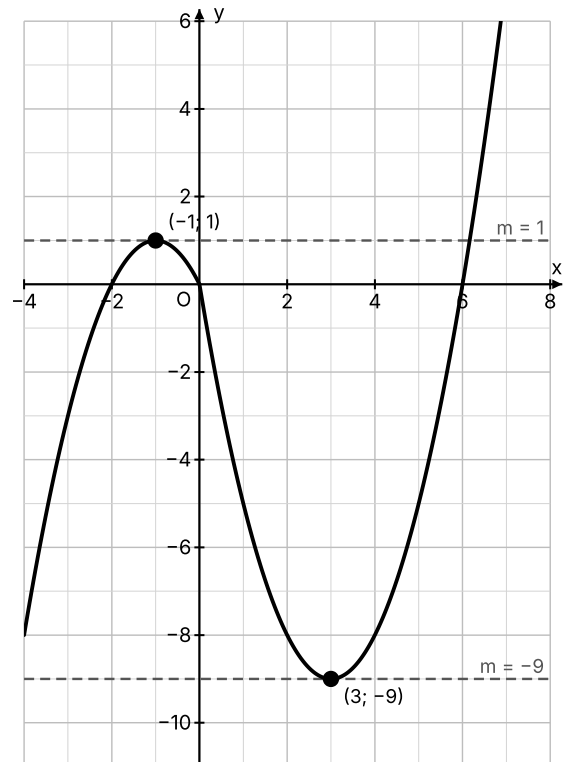
1. Раскрыть модуль отдельно при $x \geq 0$ и при $x < 0$.
2. Каждую формулу привести к виду $a(x - x_0)^2 + y_0$ и построить на своём промежутке.
3. Двигать прямую $y = m$ снизу вверх, считать общие точки.
4. Проверить особые значения m (ординаты вершин) отдельно.
5. Записать ответ.

Решение.

1. При $x \geq 0$: $|x| = x$, поэтому $y = x^2 - 2x - 4x = x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$. Парабола, ветви вверх, вершина $(3; -9)$, нули 0 и 6. Строим при $x \geq 0$.
2. При $x < 0$: $|x| = -x$, поэтому $y = -x^2 + 2x - 4x = -x^2 - 2x = -(x + 1)^2 + 1$. Парабола, ветви вниз, вершина $(-1; 1)$, нули -2 и 0. Строим при $x < 0$ (точка $(0; 0)$ уже есть у первой части).
3. Таблица значений:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	-3	0	1	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7

4. Двигаем прямую $y = m$ снизу вверх. При $m < -9$ — одна точка (левая часть); при $m = -9$ — две (вершина правой части и точка левой); при $-9 < m < 1$ — три; при $m = 1$ — две (вершина левой части и точка правой); при $m > 1$ — одна (правая ветвь).



Штриховые линии — особые положения прямой

Проверка. $m = 1$: левая часть даёт вершину $(-1; 1)$, правая — уравнение $x^2 - 6x = 1$ с корнями разных знаков (произведение корней $-1 < 0$), подходит один положительный: всего две точки. $m = -9$: правая часть — вершина $(3; -9)$; в левой части уравнение $x^2 + 2x - 9 = 0$ имеет один отрицательный корень: всего две точки.

Ответ: $m = -9$; $m = 1$.

Ловушка. Строят обе параболы целиком, а не на своих промежутках. Теряют одну из двух вершин. Считают, что при $m = 0$ точек две; на самом деле их три: $(-2; 0)$, $(0; 0)$ и $(6; 0)$.

Задача 2. Дробь: сокращение и выколотые точки

Условие. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 20x^2 + 64}{(x - 2)(x + 4)}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Что видим. Дробь: в числителе многочлен четвёртой степени без нечётных степеней, в знаменателе произведение двух скобок. Нужно разложить числитель, сократить и построить параболу с двумя выколотыми точками. Значения m , при которых одна из двух точек пересечения выколота, дают ровно одну общую точку.

Правило. Дробь определена, когда знаменатель не равен нулю; область определения записывают до сокращения. Дробь можно сократить на общий множитель: значения исходной и сокращённой функций совпадают везде, кроме точек, где знаменатель исходной дроби равен нулю.

Алгоритм.

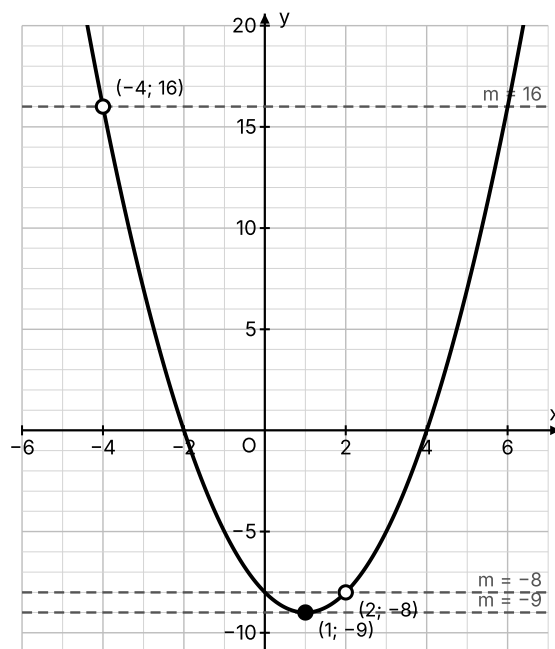
1. Записать область определения (знаменатель не равен нулю).
2. Разложить числитель на множители и сократить дробь.
3. Построить параболу и выколоть точки с исключёнными абсциссами.
4. Найти m : вершина и значения, при которых одна из двух общих точек выколота.
5. Записать ответ.

Решение.

1. Область определения: $(x - 2)(x + 4) \neq 0$, то есть $x \neq 2$ и $x \neq -4$.
2. Числитель: пусть $t = x^2$, тогда $t^2 - 20t + 64 = 0$, $t = 4$ или $t = 16$. Значит, $x^4 - 20x^2 + 64 = (x^2 - 4)(x^2 - 16) = (x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 4)$.
3. Сокращаем на $(x - 2)(x + 4)$: $y = (x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$, где $x \neq 2$, $x \neq -4$.
4. Парабола, ветви вверх, вершина $(1; -9)$, нули -2 и 4 , точка $(0; -8)$. Выколотые точки находим по сокращённой формуле: при $x = 2$ получаем $y = -8$, при $x = -4$ получаем $y = 16$. Выколоты $(2; -8)$ и $(-4; 16)$.
5. Таблица (звёздочка — выколотая точка):

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	27	(16)*	7	0	-5	-8	-9	(-8)*	-5	0	7	16

6. Прямая $y = m$: при $m < -9$ общих точек нет; при $m = -9$ — одна (вершина); при $m > -9$ — две точки $x = 1 \pm \sqrt{m + 9}$. Но одна из двух точек может оказаться выколотой. Если $m = -8$, корни $x = 2$ (выколота) и $x = 0$: остаётся одна точка. Если $m = 16$, корни $x = -4$ (выколота) и $x = 6$: тоже одна.



Штриховые линии — особые положения прямой

Проверка. $m = -8$: $x^2 - 2x - 8 = -8$, корни 2 и 0 ; первый выколот, второй допустим. $m = 16$: корни -4 и 6 ; первый выколот. Вершина не выколота (1 не равно 2 и -4).

Ответ: $m = -9$; $m = -8$; $m = 16$.

Ловушка. Записывают только $m = -9$. Не замечают, что выколотая точка забирает одну из двух общих точек. Считают ординаты выколотых точек по неупрощённой формуле (там получается $0/0$). Путают знак абсциссы при $x = -4$.

Задача 3. Гипербола с модулем и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = \frac{2|x| - 1}{|x| - 2x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Что видим. Дробь с модулем; знаменатель раскладывается на множители. Прямая $y = kx$ проходит через начало координат. Нужно найти k , при которых общих точек нет.

Правило. Модуль: $|x| = x$ при $x \geq 0$, $|x| = -x$ при $x < 0$; кроме того, $x^2 = |x|^2$. Область определения записывают до сокращения; после сокращения точки, не входящие в область определения, выкалывают.

Алгоритм.

1. Записать область определения.
2. Раскрыть модуль, сократить, построить две ветви гиперболы.
3. Выколоть точки и найти их координаты.
4. Провести $y = kx$ через начало координат: рассмотреть $k = 0$, $k > 0$, $k < 0$.
5. Найти k , при которых единственная общая точка выколота.
6. Записать ответ.

Решение.

1. Область определения: $|x| - 2x^2 = |x|(1 - 2|x|) \neq 0$, то есть $x \neq 0$ и $x \neq \pm \frac{1}{2}$.
2. Числитель $2|x| - 1 = -(1 - 2|x|)$. Сокращаем на $(1 - 2|x|)$: $y = -\frac{1}{|x|}$.
3. При $x > 0$: $y = -\frac{1}{x}$ (гипербола в IV четверти); при $x < 0$: $y = \frac{1}{x}$ (в III четверти). График симметричен относительно оси Oy. Выколоты точки с $x = \pm \frac{1}{2}$: $y = -2$, то есть $(0,5; -2)$ и $(-0,5; -2)$.
4. Таблица для $x > 0$ (левая часть симметрична):

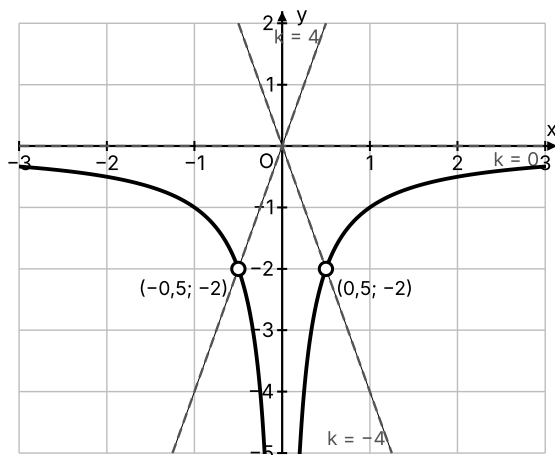
$x > 0$	0,25	0,5	1	2	4
y	-4	$(-2)^*$	-1	-0,5	-0,25

5. Прямая $y = kx$. При $k = 0$ это ось Ox: весь график лежит ниже оси ($y < 0$), общих точек нет. При $k > 0$ прямая проходит по I и III четвертям, общую точку может иметь только левая ветвь: $kx = \frac{1}{x}$, $x^2 = \frac{1}{k}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{k}}$ — одна точка. Она выколота, если $x = -\frac{1}{2}$, то есть $k = 4$: тогда общих точек нет. При $k < 0$ общую точку может иметь только правая ветвь: $x = \frac{1}{\sqrt{(-k)}}$; она выколота при $k = -4$.

Проверка. $k = 4$: прямая $y = 4x$ проходит через $(-0,5; -2)$: $4 \cdot (-0,5) = -2$, и это единственная её точка пересечения с графиком. Симметрично для $k = -4$.

Ответ: $k = -4$; $k = 0$; $k = 4$.

Ловушка. Теряют $k = 0$. Берут только положительные k . Не замечают, что единственная общая точка выколота. Путают «нет общих точек» и «одна общая точка».



Штриховые линии — особые положения прямой

Задача 4. Кусочная функция: выколотая и закрашенная точки

Условие. Постройте график функции $y = \begin{cases} 3 - x & \text{при } x < 1 \\ x^2 - 4x + 1 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Что видим. Кусочная функция: на каждом промежутке своя формула, в точке $x = 1$ график разрывается. Нужно аккуратно обращаться с концами: выколотый и закрашенный.

Правило. Каждую формулу строят только на своём промежутке. При строгом неравенстве ($<$, $>$) конец промежутка выкалывают, при нестрогом ($\leq$, $\geq$) точка принадлежит графику.

Алгоритм.

1. Построить каждую формулу на своём промежутке.
2. Определить, какие концы выколоты, какие закрашены; найти их ординаты.
3. Двигать прямую $y = m$, считать точки на каждом промежутке и в особых значениях.
4. Записать ответ с учётом строгих и нестрогих неравенств.

Решение.

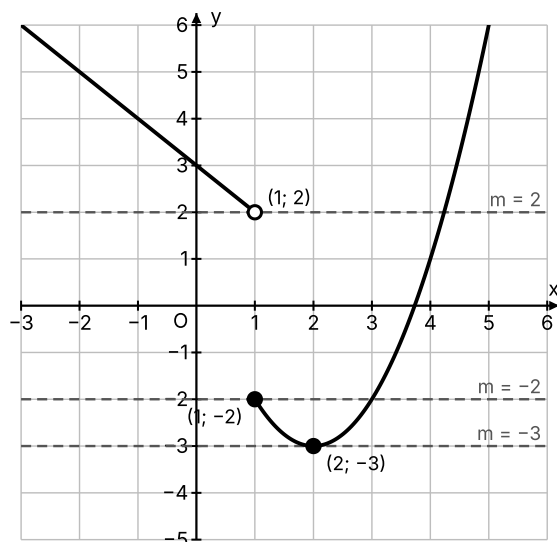
1. При $x < 1$: $y = 3 - x$ — прямая, убывает. Если подставить $x = 1$, получится 2, но $x < 1$ строго, поэтому точка $(1; 2)$ выколота. На этой части $y > 2$.

x	-1	0	0,5	1
y	4	3	2,5	(2)*

2. При $x \geq 1$: $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$. Парабола, вершина $(2; -3)$ входит в эту часть ($2 \geq 1$). Точка $(1; -2)$ принадлежит графику (закрашена).

x	1	2	3	4	5
y	-2	-3	-2	1	6

3. Двигаем прямую $y = m$. При $m < -3$ точек нет; при $m = -3$ — одна (вершина); при $-3 < m \leq -2$ — две (оба корня $x = 2 \pm \sqrt{(m + 3)}$ не меньше 1); при $-2 < m \leq 2$ — одна (только правая ветвь параболы; прямая такие значения не принимает); при $m > 2$ — две (парабола и прямая).



Штриховые линии — особые положения прямой

Проверка. $m = -2$: уравнение $(x - 2)^2 - 3 = -2$ даёт $x = 1$ и $x = 3$, оба принадлежат участку $x \geq 1$: две точки, значит $m = -2$ не подходит. $m = 2$: прямая в точку $(1; 2)$ не попадает (выколота), остаётся одна точка параболы: подходит.

Ответ: $m = -3$ и $-2 < m \leq 2$.

Ловушка. Включают $m = -2$ (там две точки). Не включают $m = 2$ («выколота точка не считается», значит значение подходит). Теряют вершину $m = -3$.

Задача 5. Модуль квадратного трёхчлена и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Что видим. Модуль квадратного трёхчлена (часть параболы ниже оси Ox отражается вверх) и прямая через начало координат. Точка $O(0; 0)$ принадлежит графику, значит, прямая $y = kx$ всегда имеет с графиком общую точку O . Для «ровно одной» нужно, чтобы других общих точек не было.

Правило. График $y = |f(x)|$: часть графика $y = f(x)$, лежащая выше оси Ox , остаётся, часть ниже оси Ox отражается симметрично относительно оси Ox . Число общих точек графика и прямой равно числу решений уравнения $f(x) = kx$.

Алгоритм.

1. Построить $y = x^2 - 4x$ и отразить часть ниже оси Ox вверх.
2. Заметить, что $O(0; 0)$ принадлежит графику при любом k .
3. Решить $f(x) = kx$ на каждом участке, отобрать допустимые корни.
4. Посчитать общие точки при разных k ; записать ответ.

Решение.

1. $y = x^2 - 4x = x(x - 4)$ — парабола с нулями 0 и 4, вершина $(2; -4)$. При $0 < x < 4$ значения отрицательны, эту часть отражаем вверх: $y = -x^2 + 4x$, вершина $(2; 4)$. При $x \leq 0$ и при $x \geq 4$ график — часть исходной параболы $y = x^2 - 4x$.

2. Таблица значений:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	12	5	0	3	4	3	0	5	12

3. Решаем $f(x) = kx$ на каждом участке. При $x \leq 0$ и при $x \geq 4$: $x^2 - 4x = kx$, $x(x - 4 - k) = 0$, откуда $x = 0$ или $x = 4 + k$. При $0 < x < 4$: $-x^2 + 4x = kx$, откуда $x = 4 - k$.

Корень $x = 0$ даёт точку O при любом k .

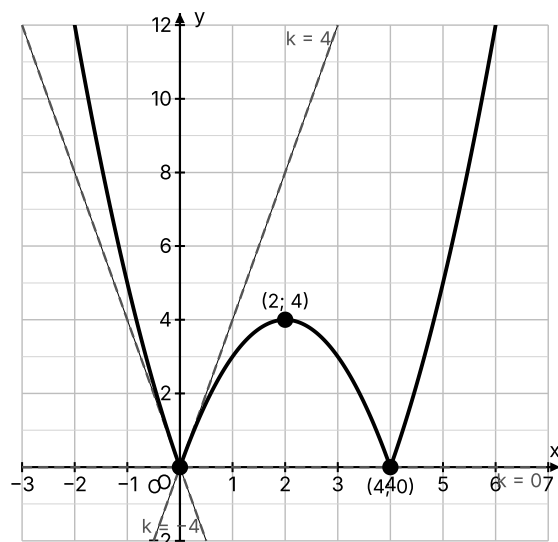
4. Какие корни допустимы. $x = 4 + k$ подходит, если $k + 4 < 0$, то есть $k < -4$ (на левой части), или если $k + 4 \geq 4$, то есть $k \geq 0$ (на правой части). $x = 4 - k$ подходит, если $0 < 4 - k < 4$, то есть $0 < k < 4$.

5. Считаем общие точки: $k < -4$ — две (O и ещё одна); $-4 \leq k < 0$ — одна (только O); $k = 0$ — две (O и $(4; 0)$); $0 < k < 4$ — три (O и две других); $k \geq 4$ — две.

Проверка. $k = -4$: при $x \leq 0$ имеем $x^2 - 4x = -4x$, $x^2 = 0$, $x = 0$; на остальных участках корней нет. Общая точка одна — O . $k = 0$: прямая $y = 0$ пересекает график в точках $(0; 0)$ и $(4; 0)$: две точки.

Ответ: $-4 \leq k < 0$.

Ловушка. Забывают, что O всегда принадлежит графику. Включают $k = 0$ (там две точки: O и $(4; 0)$). Не включают $k = -4$ (общая точка одна — O).



Штриховые линии — особые положения прямой

Ответы. 1) $m = -9$; $m = 1 \cdot 2$) $m = -9$; $m = -8$; $m = 16 \cdot 3$) $k = -4$; $k = 0$; $k = 4 \cdot 4$) $m = -3$ и $-2 < m \leq 2 \cdot 5$) $-4 \leq k < 0$.

Памятка: алгоритм и оформление, графики функций (№22)

Задание 22 оформляют полностью на бланке №2 (2 балла). Эксперт смотрит и график, и ход рассуждений, и ответ.

Алгоритм решения задания 22

- 1. **Прочитай вопрос.** Прямая $y = m$ (горизонтальная) или $y = kx$ (через начало координат)? Сколько общих точек нужно: 0, 1, 2, 3?
- 2. **Область определения.** Если есть дробь — запиши, при каких x знаменатель равен 0, до сокращения.
- 3. **Преобразуй формулу.** Модуль раскрой отдельно на каждом промежутке; дробь разложи и сократи.
- 4. **Таблицы.** Для каждой формулы: вершина, нули, точка на Оу, не меньше 5 точек (x и y).
- 5. **График.** Оси x , y , начало O , единичный отрезок; каждый кусок — на своём промежутке; плавные линии; выколотые точки — пустые кружки с координатами.
- 6. **Двигай прямую.** Найди особые положения: вершины, концы кусков, выколотые точки, $k = 0$, касание.
- 7. **Проверь каждое особое значение** отдельно: подстановкой или решением уравнения.
- 8. **Ответ.** Значения и промежутки с учётом строгих и нестрогих знаков.

Что вижу — что делаю

Что вижу	Что делаю
$ x $ рядом с x ($x x $, $x^2 - 2 x $)	Раскрыть при $x \geq 0$ и при $x < 0$: две формулы
$ f(x) $ — модуль всей функции	Построить $f(x)$, часть ниже Ох отразить вверх
Дробь	ОДЗ $\rightarrow$ разложить $\rightarrow$ сократить $\rightarrow$ выколоть
Разные формулы на промежутках	Концы: $\leq \geq$ — закрашен, $< >$ — выколот
Прямая $y = m$	Двигать снизу вверх; особые m : вершины, концы кусков, выколотые
Прямая $y = kx$	Через O ; особые k : через выколотую точку ($k = y_0/x_0$), $k = 0$, касание

Что снижает баллы

- График нарисован «от руки» без таблицы значений, вершина не найдена.
- Куски построены целиком, а не на своих промежутках.
- Выколотая точка не отмечена или без координат.
- Парабола «ломаная», оси без подписей и без единичного отрезка.
- Особые значения не проверены; в ответе потеряно значение или перепутан знак неравенства.

Образец записи на бланке №2

Задача. Постройте график функции $y = x^2 - 2|x| - 3$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

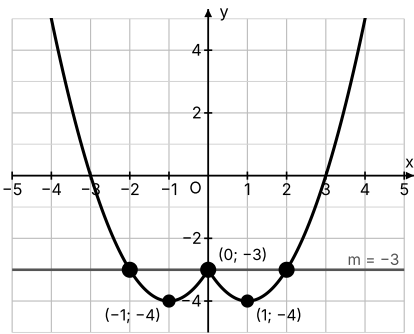
1) Раскрываем модуль. Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$.

2) Таблицы.

$x \geq 0$	0	1	2	3	4
y	-3	-4	-3	0	5

$x < 0$	-1	-2	-3	-4
y	-4	-3	0	5

3) График — две параболы с вершинами $(1; -4)$ и $(-1; -4)$, общая точка $(0; -3)$.



4) Прямая $y = m$. $m < -4$: общих точек нет; $m = -4$: две; $-4 < m < -3$: четыре; **$m = -3$: три** — $(-2; -3)$, $(0; -3)$, $(2; -3)$; $m > -3$: две.

Ответ: $m = -3$.

Как оценивается (схема)

2 балла	График построен верно; найдены все искомые значения параметра.
1 балл	График построен верно, но значения параметра найдены с ошибкой (потеряно значение, неверно учтена граница).
0 баллов	График неверный; или только ответ без построения.

Это общая схема. Точные формулировки смотрите в критериях ФИПИ текущего года.

Чек-лист перед сдачей

- ☐ ОДЗ записано (если есть дробь).
- ☐ Модуль раскрыт на промежутках.
- ☐ Есть таблицы значений.
- ☐ Вершины и нули отмечены.
- ☐ Выколотые точки с координатами.
- ☐ Оси подписаны, единичный отрезок виден.
- ☐ Особые значения проверены.
- ☐ В ответе все значения и верные знаки неравенств.

Зачётный лист · графики функций (3 уровня)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____ Время: 40 минут. Уровень 3 оформляйте полностью, как на экзамене: таблицы, график, проверка особых значений, ответ.

Уровень 1 · на «3» · 4 задания по 1 баллу

1.1. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 2x - 4$ с осями координат.

Ответ: _____

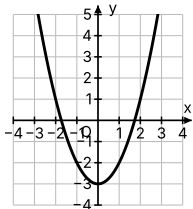
1.2. Найдите координаты вершины параболы $y = x^2 + 2x - 3$ и нули функции.

Ответ: _____

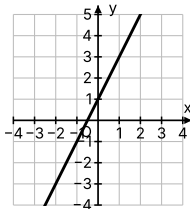
1.3. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $(-2; 3)$. Найдите k .

Ответ: _____

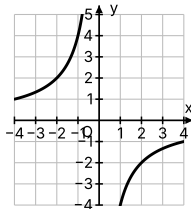
1.4. Установите соответствие между графиками (А, Б, В) и формулами (1-3). В ответ запишите три цифры подряд без пробелов в порядке А, Б, В.



A



Б



B

$$1) y = -\frac{4}{x}$$

$$2) y = x^2 - 3$$

3) $y = 2x + 1$

Ответ: _____

Уровень 2 · на «4» · 4 задания по 1 баллу

2.1. Упростите $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ и найдите координаты выколотой точки графика.

Ответ: _____

2.2. При каком значении m прямая $y = m$ имеет с параболой $y = x^2 - 6x + 5$ ровно одну общую точку?

Ответ: _____

2.3. Сколько общих точек имеет график функции $y = x^2 - 4|x|$ с прямой $y = -3$?

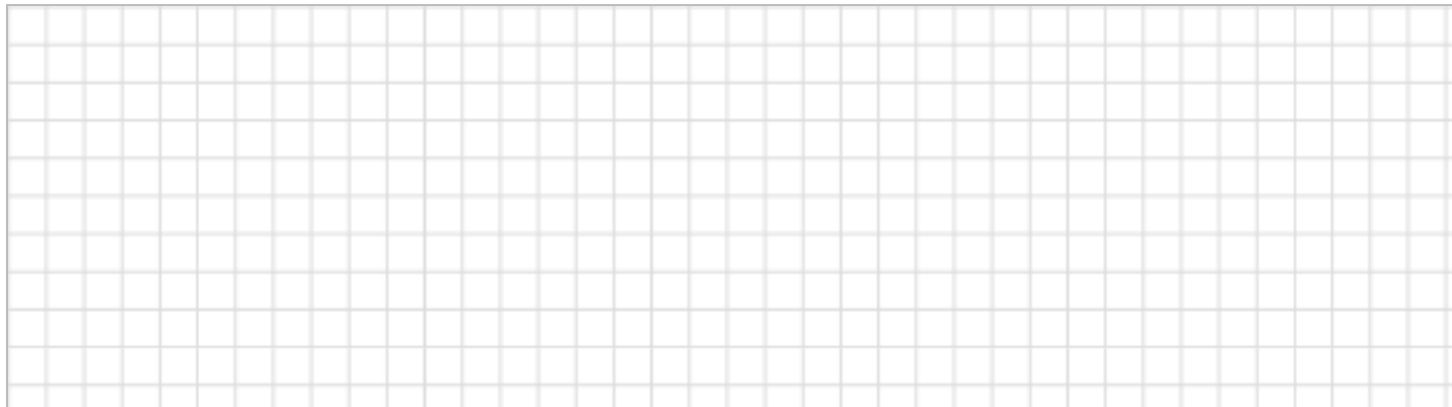
Ответ:

2.4. Найдите координаты общих точек графиков функций $y = x^2 - 2x - 3$ и $y = x - 3$.

Ответ:

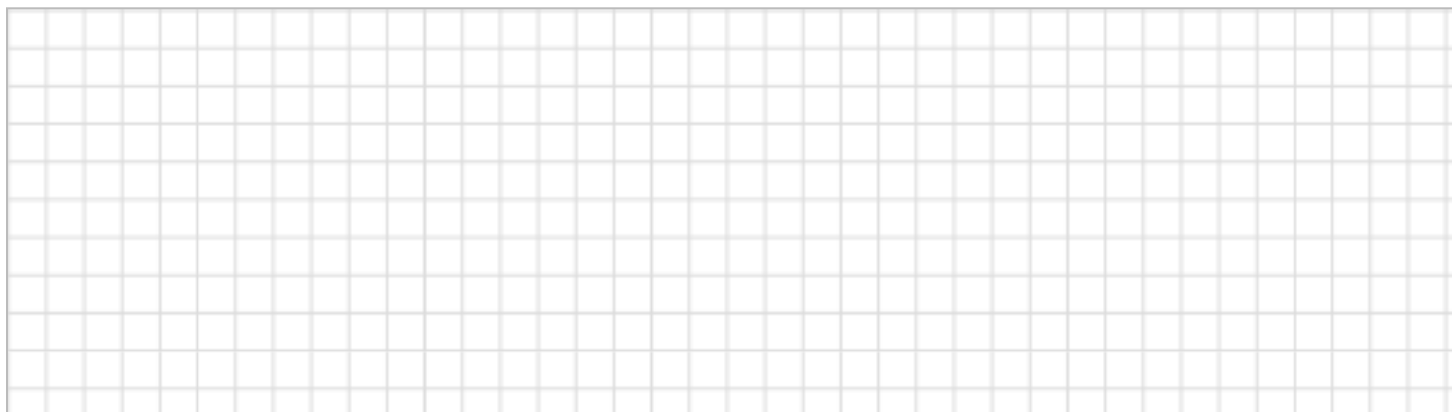
Уровень 3 · на «5» · 4 задания по 2 балла (как №22)

3.1. Постройте график функции $y = x|x| - 2|x| - 6x$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.



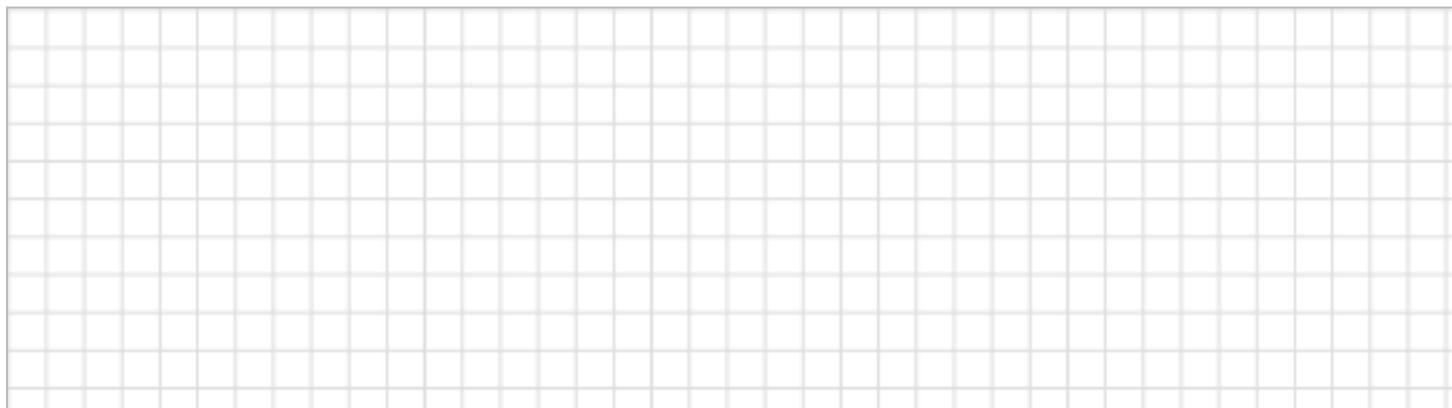
Ответ: _____

3.2. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 26x^2 + 25}{(x - 1)(x + 5)}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



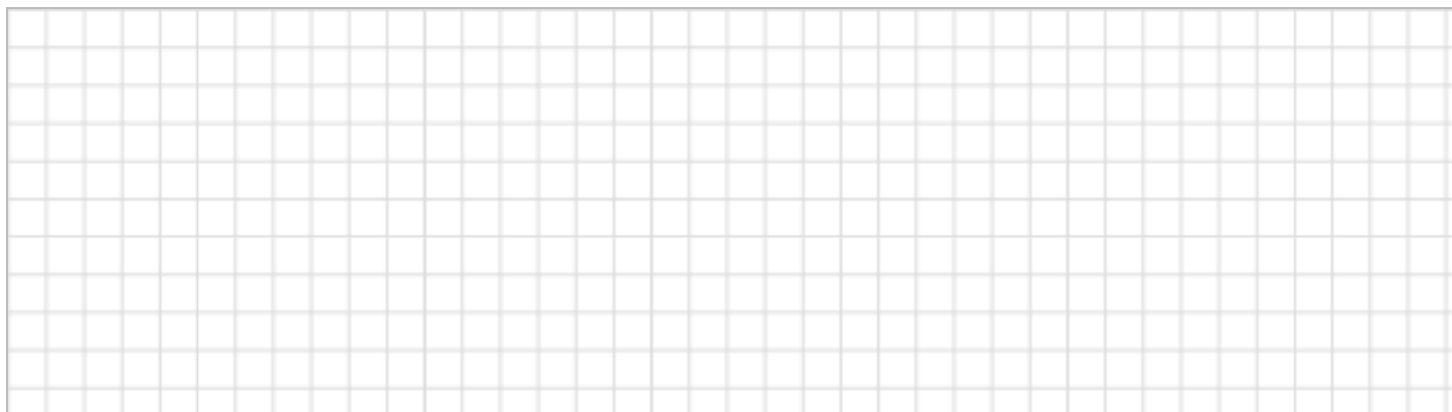
Ответ: _____

3.3. Постройте график функции $y = \frac{3|x| - 1}{|x| - 3x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.



Ответ: _____

3.4. Постройте график функции $y = \begin{cases} 6 - x & \text{при } x < 2 \\ x^2 - 8x + 11 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



Ответ: _____

Ответы, ключевые точки и критерии (для учителя).**Уровень 1.**

№	Ответ	Ключевые точки
1.1	(2; 0), (0; -4)	$y = 0: 2x = 4, x = 2. x = 0: y = -4.$
1.2	вершина (-1; -4); нули -3 и 1	$x_0 = -b/(2a) = -1; y_0 = 1 - 2 - 3 = -4; x^2 + 2x - 3 = 0$, корни -3 и 1 (теорема Виета).
1.3	-6	$k = xy = (-2) \cdot 3 = -6.$
1.4	231	A — парабола, ветви вверх: формула 2 ($x^2 - 3$). Б — прямая, возрастает: формула 3. В — гипербола во II и IV четвертях: $k < 0$, формула 1.

Уровень 2.

№	Ответ	Ключевые точки
2.1	$y = x - 3$; выколота (-3; -6)	$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$; ОДЗ $x \neq -3$; после сокращения $y = x - 3$; при $x = -3$ получаем $y = -6$.
2.2	-4	Вершина $x_0 = 3, y_0 = 9 - 18 + 5 = -4$. Горизонталь через вершину касается параболы.
2.3	4	$x \geq 0: x^2 - 4x = -3, x = 1$ и $x = 3$. График чётный: ещё $x = -1$ и $x = -3$. Четыре точки (проверка: вершины (± 2 ; -4) ниже -3, «горб» (0; 0) выше).
2.4	(0; -3), (3; 0)	$x^2 - 2x - 3 = x - 3, x^2 - 3x = 0, x = 0$ или $x = 3; y = x - 3$ даёт -3 и 0.

Уровень 3.

№	Ответ	Ключевые точки
3.1	$m = -16; m = 4$	$x \geq 0: y = x^2 - 8x$, вершина (4; -16). $x < 0: y = -x^2 - 4x$, вершина (-2; 4). Ровно две точки — на уровнях вершин: $m = -16$ и $m = 4$; между ними три точки.
3.2	$m = -9; m = -8; m = 40$	ОДЗ: $x \neq 1, x \neq -5$. Числитель $(x^2 - 1)(x^2 - 25)$; после сокращения $y = (x + 1)(x - 5)$, вершина (2; -9). Выколоты (1; -8) и (-5; 40). $m = -9$ — вершина; $m = -8$ и $m = 40$ — одна из двух точек выколота.
3.3	$k = -9; k = 0; k = 9$	ОДЗ: $x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{3}$. После сокращения $y = -\frac{1}{ x }$. Выколоты ($\pm \frac{1}{3}; -3$). $k = 0$ — нет точек (график ниже оси Oх); $k = \pm 9$ — единственная общая точка выколота.
3.4	$m = -5$ и $-1 < m \leq 4$	$x < 2: y = 6 - x$, конец (2; 4) выколот. $x \geq 2: y = (x - 4)^2 - 5$, вершина (4; -5), точка (2; -1) закрашена. Ровно одна точка: $m = -5$ и $-1 < m \leq 4$. При $m = -1$ две точки.

Баллы. Максимум 16 (4 + 4 + 8). Уровень 3: 2 балла — график построен верно, значения параметра найдены верно; 1 балл — график верен, но значения найдены с ошибкой (потеряно значение, неверная граница); 0 — иначе.

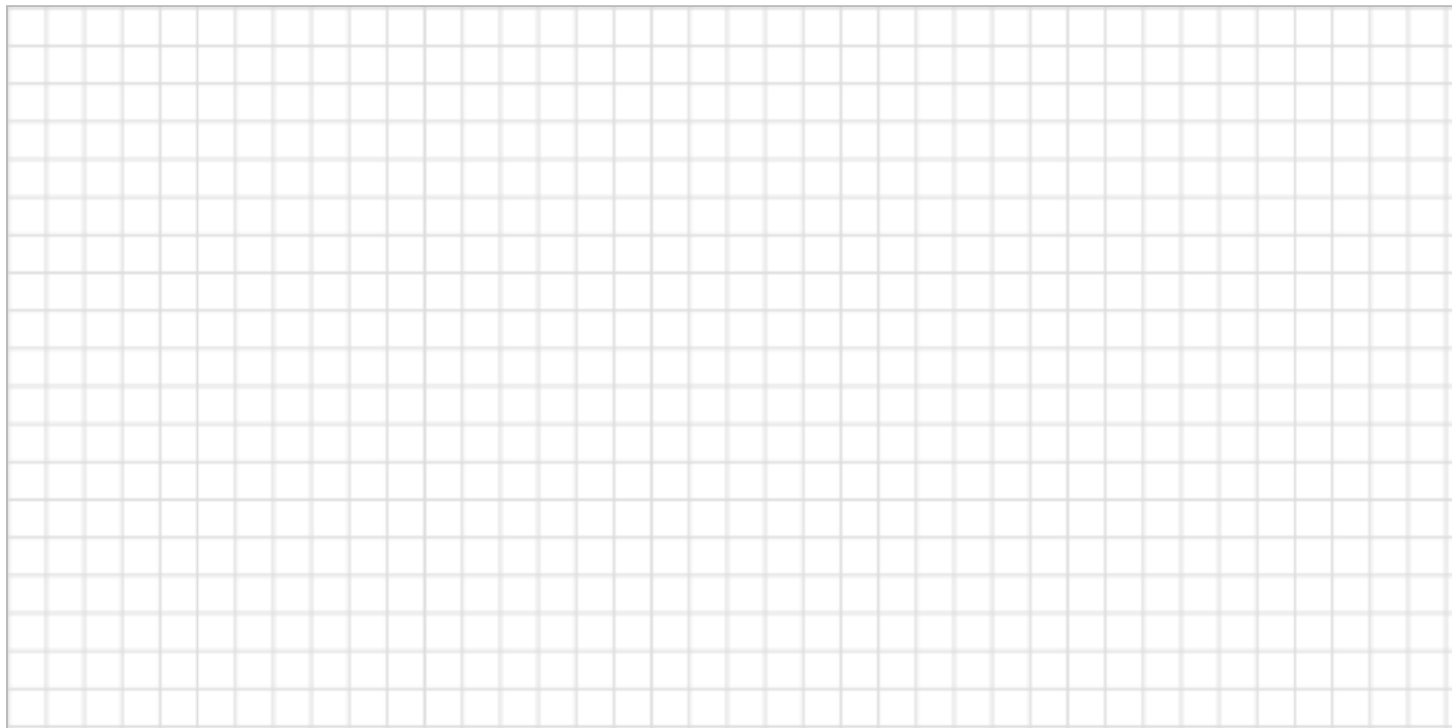
Оценка (предложение, подстройте под ученика). «3» — на уровне 1 не меньше 3 баллов. «4» — уровень 1 не меньше 3 баллов и уровень 2 не меньше 3 баллов. «5» — уровни 1 и 2 не меньше 3 баллов каждый и уровень 3 не меньше 6 баллов. Если уровень 1 ниже 3 баллов: вернуться к теории (разделы 1-4) и повторить пятиминутку. Пороги не официальные.

Домашняя карточка · графики функций (№22)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____

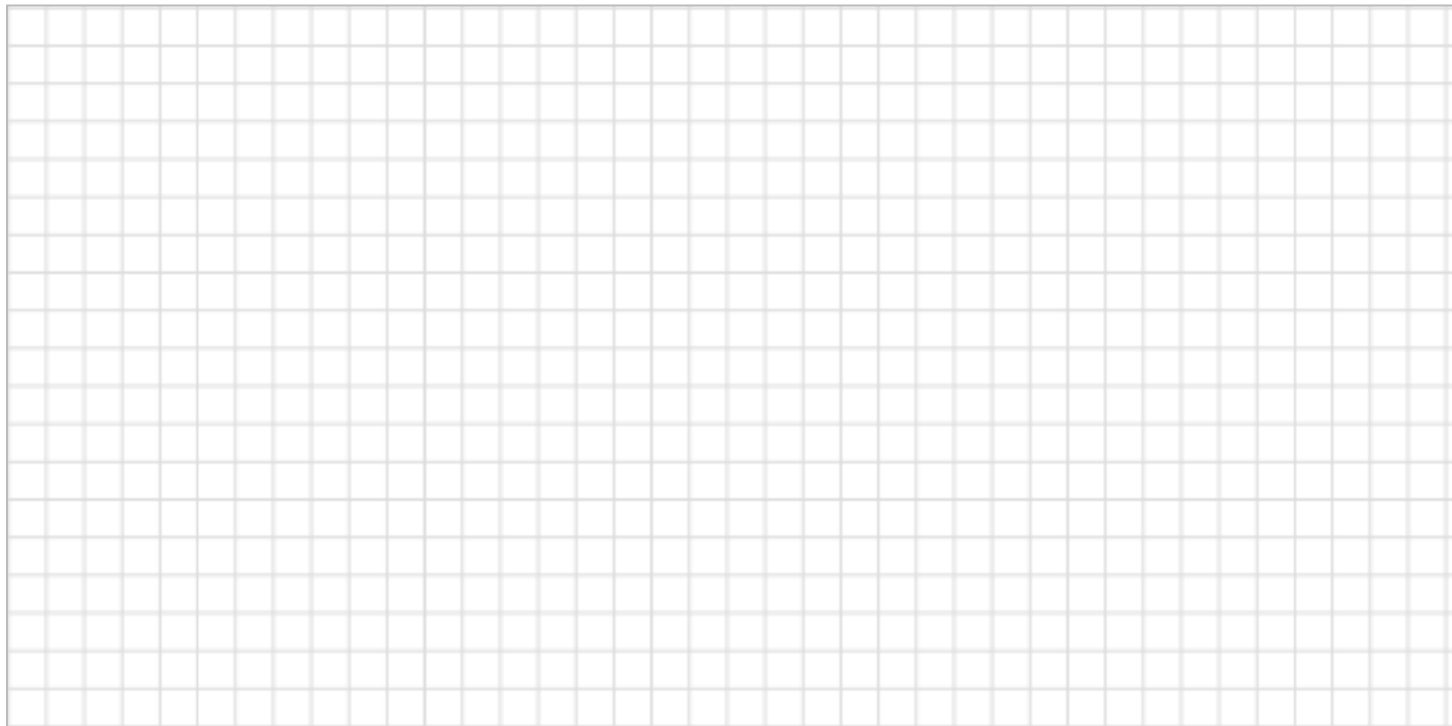
Оформите каждую задачу полностью, как на экзамене: преобразование формулы (модуль, ОДЗ, сокращение), таблицы значений, график с подписанными осями и выколотыми точками, проверка особых значений, ответ. Образец записи — в памятке.

1. Постройте график функции $y = x|x| - 3|x| - 5x$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.



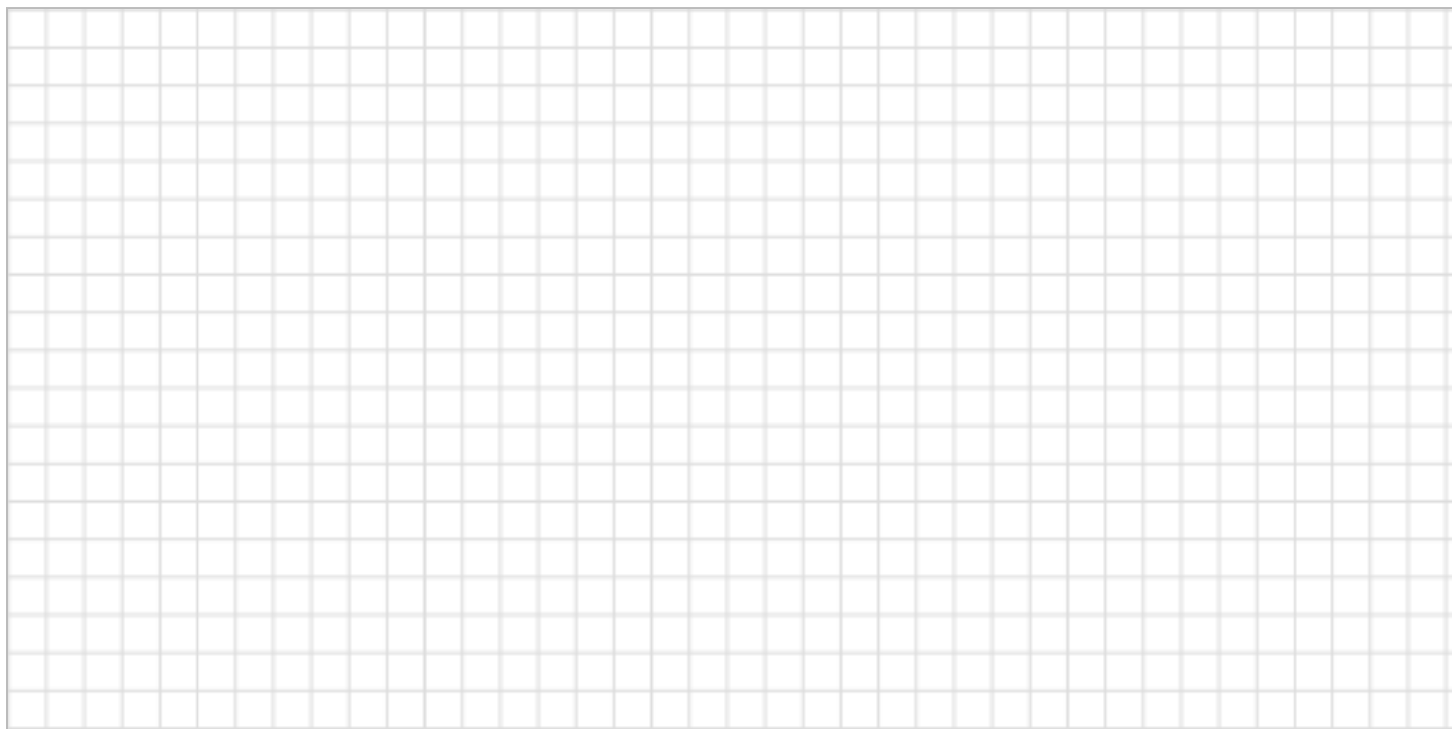
Ответ: _____

2. Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 34x^2 + 225}{(x - 3)(x + 5)}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



Ответ: _____

3. Постройте график функции $y = |x^2 - 8x|$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно три общие точки.



Ответ: _____

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} 8 - x & \text{при } x < 0 \\ x^2 - 6x + 5 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

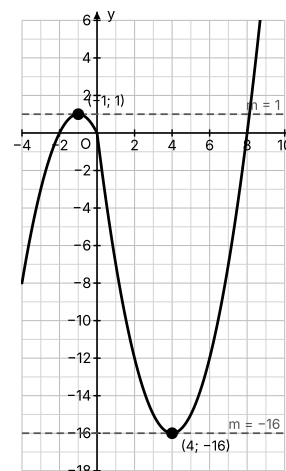


Ответ: _____

Ответы и ключевые точки проверки (для учителя и родителей).

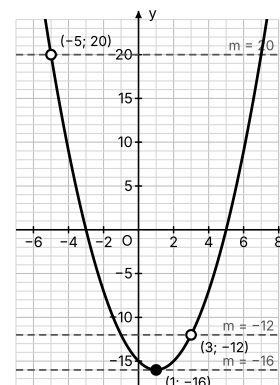
1) $m = -16$; $m = 1$. (Раскрытие модуля: две параболы)

Ключевые точки: $x \geq 0$: $y = x^2 - 8x$, вершина $(4; -16)$. $x < 0$: $y = -x^2 - 2x$, вершина $(-1; 1)$. Ровно две точки — на уровнях вершин: $m = -16$ и $m = 1$; между ними три точки.



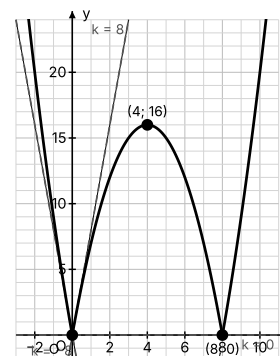
2) $m = -16$; $m = -12$; $m = 20$. (Дробь: сокращение и выколотые точки)

Ключевые точки: ОДЗ: $x \neq 3$, $x \neq -5$. Числитель $(x^2 - 9)(x^2 - 25)$; после сокращения $y = (x + 3)(x - 5)$, вершина $(1; -16)$. Выколоты $(3; -12)$ и $(-5; 20)$. $m = -16$ — вершина; $m = -12$ и $m = 20$ — одна из двух точек выкола.



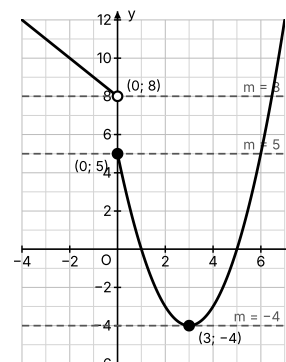
3) $0 < k < 8$. (Модуль квадратного трёхчлена и прямая $y = kx$)

Ключевые точки: $O(0; 0)$ на графике при любом k . При $x \leq 0$ и $x \geq 8$ корни $x = 0$ и $x = 8 + k$; при $0 < x < 8$ корень $x = 8 - k$. Три точки: $0 < k < 8$ (O и ещё две).



4) $m = -4$ и $5 < m \leq 8$. (Кусочная функция: выколотая и закрашенная точки)

Ключевые точки: $x < 0$: $y = 8 - x$, конец $(0; 8)$ выколот. $x \geq 0$: $y = (x - 3)^2 - 4$, вершина $(3; -4)$, точка $(0; 5)$ закрашена. Ровно одна точка: $m = -4$ и $5 < m \leq 8$. При $m = 5$ две точки.



Как проверять. Ответ без построения графика не засчитывается. Если график верен, а в ответе потеряно значение или перепутана строгость неравенства, — 1 балл из 2. Задача 1: вершины парабол на своих промежутках, не на целых параболлах. Задача 2: ОДЗ записано до сокращения, ординаты выколотых точек найдены по сокращённой формуле. Задача 3: $O(0; 0)$ принадлежит графику, считаем остальные точки. Задача 4: проверяет, что ученик различает выколотый и закрашенный концы.

Графики функций (№22, основа — №11)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, №22 часть 2, 2 балла).

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи есть похожая для самостоятельного решения (ответы в конце файла). Рисунки к задачам смотри в «Разборе 5 задач»: диалог объясняет, откуда что берётся, а график строится по таблице.

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → памятка → зачётный лист → домашняя карточка.

Задачи разбора: 1. Раскрытие модуля, две параболы. 2. Дробь и выколотые точки. 3. Гипербола с модулем и прямой $y = kx$. 4. Кусочная функция. 5. Модуль трёхчлена и прямая $y = kx$.

Общая часть. Как решается любое задание №22

Учитель: В №22 всегда одно и то же: дана функция с подвохом (модуль, дробь, две формулы) и прямая с параметром. Что у нас строится и что считается?

Ученик: Строится график. Потом прямая двигается, и мы считаем, в скольких точках она его пересекает.

Учитель: Верно. Прямая бывает двух видов. Какие?

Ученик: $y = m$, горизонтальная. И $y = kx$, она всегда проходит через начало координат и поворачивается.

Учитель: Алгоритм для всех пяти задач, фиксируем:

1. Записать область определения и раскрыть модули (получить формулы на промежутках).
2. Упростить каждую формулу, построить график по таблице, отметить выколотые и закрашенные точки.
3. Двигать прямую ($y = m$ вверх, $y = kx$ вокруг начала), считать общие точки.
4. Отдельно проверить особые значения: вершины, выколотые точки, концы промежутков.
5. Записать ответ, не забыв строгость неравенств.

Учитель: Какой шаг самый опасный?

Ученик: Четвёртый. Там легко потерять значение или взять лишнее.

Учитель: Да, на нём теряются баллы. Поэтому в каждой задаче ниже есть ветка с типичной ошибкой.

Задача 1. Раскрытие модуля: две параболы

Условие. Постройте график функции $y = x|x| - 2|x| - 4x$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Функцию с модулем, к тому же умноженным на x . Прямая $y = m$ горизонтальная. Нужно найти m , при которых общих точек ровно две.

Учитель: Что тут легко упустить?

Ученик: Что общих точек бывает одна, две или три в зависимости от m . Нужны именно «ровно две».

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что делаем с модулем?

Ученик: Раскрываем отдельно для $x \geq 0$ и для $x < 0$.

Учитель: Формулировка: $|x| = x$ при $x \geq 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$. А что значит «общая точка графика и прямой $y = m$ »?

Ученик: Это решение уравнения $f(x) = m$. Сколько решений, столько общих точек.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до вычислений.

Ученик: Раскрыть модуль. Привести каждую формулу к виду параболы и найти вершину. Построить на своих

промежутках. Двигать прямую снизу вверх. Проверить уровни вершин.

Учитель: Фиксируем алгоритм из общей части (шаги 1–5).

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Раскрываем модуль при $x \geq 0$. Что получилось?

Ученик: $y = x^2 - 2x - 4x = x^2 - 6x$.

Учитель: Как найти вершину?

Ученик: Выделяю квадрат: $(x - 3)^2 - 9$. Вершина (3; -9), нули 0 и 6.

Учитель: Теперь $x < 0$.

Ученик: $|x| = -x$, значит $y = -x^2 + 2x - 4x = -x^2 - 2x = -(x + 1)^2 + 1$. Вершина (-1; 1), нули -2 и 0.

Учитель: Что проверяем у вершин?

Ученик: Что они лежат на своих промежутках. $3 \geq 0$ и $-1 < 0$, обе подходят.

Если ученик ответит: строим обе параболы целиком.

Учитель: Проверь: $x = 4$ по какой формуле считается?

А что делает вторая парабола в точке $x = 4$? Её часть мы берём только при $x < 0$.

Учитель: Двигаем прямую $y = m$ снизу вверх. Что видим?

Ученик: Ниже -9 прямая пересекает только левую часть: одна точка. На уровне -9 касается правой вершины и пересекает левую: две. От -9 до 1 три. На уровне 1 касается левой вершины и пересекает правую: две. Выше 1 одна.

Учитель: Что в ответ?

Ученик: $m = -9$ и $m = 1$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверить?

Ученик: Подставить. $m = 1$: $x^2 - 6x = 1$ даёт корни разных знаков, подходит один положительный, плюс вершина (-1; 1). Две точки. $m = -9$: вершина (3; -9) и в левой части $x^2 + 2x - 9 = 0$ даёт один отрицательный корень. Две точки.

Учитель: Как записать ответ?

Ученик: $m = -9$; $m = 1$, и график с отмеченными вершинами.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: Есть модуль, график строится из частей парабол, прямая горизонтальная, нужно «ровно N точек».

Самостоятельно. $y = x|x| - |x| - 5x$, ровно две общие точки с $y = m$.

Задача 2. Дробь и выколотые точки

Условие. Постройте график функции $y = (x^4 - 20x^2 + 64) / ((x - 2)(x + 4))$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Дробь. Сверху многочлен четвёртой степени, снизу две скобки. Нужно сократить и построить график, а потом найти m , при которых ровно одна общая точка.

Учитель: Что запомнить до сокращения?

Ученик: Область определения: $x \neq 2$ и $x \neq -4$.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как раскладывать числитель?

Ученик: Замена $t = x^2$. Получается $t^2 - 20t + 64 = 0$.

Учитель: Правило про область определения: дробь определена, когда знаменатель не равен нулю; сокращённая функция совпадает с исходной везде, кроме этих точек.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Область определения. Разложить числитель. Сократить. Построить график. Выколоть точки. Двигать прямую.

Учитель: Фиксируем алгоритм из общей части.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Корни уравнения для t ?

Ученик: По теореме Виета: сумма 20, произведение 64. Это 4 и 16.

Учитель: Тогда числитель?

Ученик: $(x^2 - 4)(x^2 - 16) = (x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 4)$.

Учитель: Сокращаем на $(x - 2)(x + 4)$. Что осталось?

Ученик: $y = (x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$. Вершина (1; -9), нули -2 и 4.

Учитель: Где выколотые точки и как найти их ординаты?

Ученик: При $x = 2$ и $x = -4$. Подставляю в сокращённую формулу: при $x = 2$ получаю -8, при $x = -4$ получаю 16.

Если ученик ответит: подставляю в исходную дробь, получается 0/0.

Учитель: Исходная дробь в этих точках не определена. Ординату берём из сокращённой формулы, это значение, которого «не хватает» графику.

Учитель: Как работает прямая $y = m$?

Ученик: Ниже -9 общих точек нет. На уровне -9 одна, вершина. Выше -9 две: $x = 1 \pm \sqrt{(m + 9)}$. Но одна из них может оказаться выколотой.

Учитель: Когда?

Ученик: Если корень равен 2 или -4. При $m = -8$ корни $x = 2$ и $x = 0$: первый выколот, остаётся одна. При $m = 16$ корни $x = -4$ и $x = 6$: тоже одна.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Что проверяем?

Ученик: Что вершина не выколота: $x = 1$, это не 2 и не -4. Значит, $m = -9$ подходит.

Ученик: Ответ: $m = -9$; $m = -8$; $m = 16$.

Этап 6. Перенос

Учитель: Признаки?

Ученик: Дробь с разложимым числителем, в ответе значения m «при которых ровно одна точка» — почти всегда нужно вспомнить про выколотые точки.

Самостоятельно. $y = (x^4 - 52x^2 + 576) / ((x - 4)(x + 6))$, ровно одна общая точка с $y = m$.

Задача 3. Гипербола с модулем и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = (2|x| - 1) / (|x| - 2x^2)$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки. В ответ запишите наибольшее значение k .

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Дробь с модулем. Прямая $y = kx$ проходит через начало координат. Нужно найти k , при которых общих точек нет, и выбрать наибольшее.

Учитель: Где ловушка условия?

Ученик: «Не имеет ни одной точки» и «наибольшее». Нужно записать одно число.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что известно про модуль и квадрат?

Ученик: $x^2 = |x|^2$, и $|x| = x$ при $x \geq 0$, $|x| = -x$ при $x < 0$.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Область определения. Разложить знаменатель. Сократить. Построить две ветви. Выколоть точки. Провести $y = kx$.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Знаменатель?

Ученик: $|x| - 2x^2 = |x|(1 - 2|x|)$. Не равен нулю: $x \neq 0$ и $x \neq \pm 1/2$.

Учитель: Числитель?

Ученик: $2|x| - 1 = -(1 - 2|x|)$. Сокращаю: $y = -1/|x|$.

Учитель: Как выглядит график?

Ученик: При $x > 0$: $y = -1/x$, IV четверть. При $x < 0$: $y = 1/x$, III четверть. Выколоты точки с $x = \pm 1/2$: $y = -2$, то есть (0,5; -2) и (-0,5; -2).

Учитель: Прямая $y = kx$. Сначала $k = 0$.

Ученик: Это ось Ох. График весь ниже оси, общих точек нет. $k = 0$ подходит.

Учитель: Теперь $k > 0$.

Ученик: Прямая идёт через I и III четверти, общая точка может быть только с левой ветвью. $kx = 1/x$, $x^2 = 1/k$, $x = \pm 1/\sqrt{k}$, одна точка. Она выколота, когда $x = \pm 1/2$, то есть $k = 4$. Тогда общих точек нет.

Если ученик ответит: при $k > 0$ общая точка одна, значит, нет подходящих k .

Учитель: А если единственная точка выколота? Что с ней?

Ученик: Не считается. Значит, $k = 4$ подходит. При $k < 0$ симметрично: $k = -4$.

Этап 5. Проверка и ответ

Ученик: Прямая $y = 4x$ проходит через (-0,5; -2): $4 \cdot (-0,5) = -2$. Эта точка выколота, других нет. Значения k : -4; 0; 4. Наибольшее равно 4.

Этап 6. Перенос

Ученик: Признак: дробь с модулем, прямая через начало координат, вопрос про «нет общих точек».

Самостоятельно. $y = (4|x| - 1) / (|x| - 4x^2)$, наибольшее k , при котором нет общих точек с $y = kx$.

Задача 4. Кусочная функция

Условие. Постройте график функции $y = 3 - x$ при $x < 1$ и $y = x^2 - 4x + 1$ при $x \geq 1$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Функция задана двумя формулами. В точке $x = 1$ график разрывается. Прямая горизонтальная.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что с концами промежутков?

Ученик: При строгом неравенстве конец выколот, при нестрогом закрашен.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Построить каждую формулу на своём промежутке. Найти ординаты концов. Двигать прямую. Проверить граничные значения.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что даёт первая формула?

Ученик: Прямая $y = 3 - x$ при $x < 1$. При $x = 1$ получилось бы 2, но $x < 1$ строго: точка (1; 2) выколота. На этой части $y > 2$.

Учитель: Вторая?

Ученик: $y = (x - 2)^2 - 3$, вершина (2; -3), и $2 \geq 1$, она принадлежит графику. При $x = 1$: -2, точка (1; -2) закрашена.

Учитель: Двигаем прямую.

Ученик: Ниже -3 точек нет. На -3 одна: вершина. От -3 до -2 парабола даёт две точки ($x = 2 \pm \sqrt{(m + 3)}$), оба не меньше 1). Нужно проверить $m = -2$: корни 1 и 3, оба подходят, две точки. От -2 до 2 (включая 2) одна точка: правая ветвь параболы, а прямая такие значения не принимает. Выше 2 две: парабола и прямая.

Если ученик ответит: $m = 2$ не подходит, там выколота точка.

Учитель: Что происходит при $m = 2$ с параболой? Подставь: $(x - 2)^2 - 3 = 2$.

Ученик: Корни $2 \pm \sqrt{5}$; подходит $x = 2 + \sqrt{5}$, один. А выколота точка не считается. Значит, одна общая точка, $m = 2$ подходит.

Этап 5. Проверка и ответ

Ученик: $m = -2$ не подходит (две точки), $m = 2$ подходит (одна). Ответ: $m = -3$ и $-2 < m \leq 2$.

Этап 6. Перенос

Ученик: Признаки: две формулы с разными промежутками, нужно следить за строгостью неравенств.

Самостоятельно. $y = 7 - x$ при $x < 0$ и $y = x^2 - 4x + 3$ при $x \geq 0$, ровно одна общая точка с $y = m$.

Задача 5. Модуль трёхчлена и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Модуль всего выражения: часть параболы под осью Ox отражается вверх. Прямая через начало координат.

Учитель: Что тут особенного про начало координат?

Ученик: Точка $O(0; 0)$ принадлежит и графику, и любой такой прямой. Значит, общая точка есть всегда. Нужно, чтобы других не было.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Правило для $y = |f(x)|$: часть графика над осью остаётся, часть под осью отражается вверх.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Построить $y = x^2 - 4x$, отразить часть под осью. Решить $f(x) = kx$ на каждом участке. Отобрать допустимые корни. Посчитать точки.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Парабола $y = x^2 - 4x$?

Ученик: Нули 0 и 4, вершина $(2; -4)$. При $0 < x < 4$ она ниже оси, эту часть отражаем: $y = -x^2 + 4x$, вершина $(2; 4)$.

Учитель: Решаем уравнение на участках $x \leq 0$ и $x \geq 4$.

Ученик: $x^2 - 4x = kx$, $x(x - 4 - k) = 0$, значит $x = 0$ или $x = 4 + k$. Корень $x = 4 + k$ допустим, если $k + 4 < 0$ (левая часть) или $k + 4 \geq 4$, то есть $k \geq 0$ (правая часть).

Учитель: Теперь $0 < x < 4$.

Ученик: $-x^2 + 4x = kx$, $x = 4 - k$. Допустим при $0 < 4 - k < 4$, то есть $0 < k < 4$.

Учитель: Считаю.

Ученик: $k < -4$: две точки. $-4 \leq k < 0$: одна, только O . $k = 0$: две, O и $(4; 0)$. $0 < k < 4$: три. $k \geq 4$: две.

| Если ученик ответит: $k = 0$ подходит, там одна точка.

| **Учитель:** Подставь $k = 0$. Это ось Ox . Где она пересекает график?

Ученик: В точках $(0; 0)$ и $(4; 0)$. Две. Значит, $k = 0$ не подходит.

Этап 5. Проверка и ответ

Ученик: $k = -4$: $x^2 - 4x = -4x$ даёт $x = 0$, других корней нет, одна точка. Ответ: $-4 \leq k < 0$.

Этап 6. Перенос

Ученик: Признаки: модуль трёхчлена, прямая $y = kx$ через начало координат.

Самостоятельно. $y = |x^2 - 6x|$, ровно одна общая точка с $y = kx$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

- $y = x|x| - |x| - 5x$: $m = -9$; $m = 4$.
- $y = (x^4 - 52x^2 + 576) / ((x - 4)(x + 6))$: $m = -25$; $m = -16$; $m = 24$.
- $y = (4|x| - 1) / (|x| - 4x^2)$: $k = -16$; $k = 0$; $k = 16$, наибольшее 16.
- $y = 7 - x$ ($x < 0$), $y = x^2 - 4x + 3$ ($x \geq 0$): $m = -1$ и $3 < m \leq 7$.
- $y = |x^2 - 6x|$: $-6 \leq k < 0$.

План урока на 60 минут (индивидуальное занятие)

- Разминка и проверка ДЗ, 5 мин. Устно: как раскрыть модуль, что такое выколота точка.
- Возврат к раннему материалу, 10 мин. Парабола: вершина, нули (2 задачи, например $y = x^2 - 6x + 5$).
- Новая тема, 15 мин. Разобрать задачу 1 или 2 по диалогу; ученик сам называет алгоритм.
- Отработка, 18 мин. Серия: самостоятельно из этого файла, от копии разобранной до новой.
- Смешанная практика, 8 мин. Три задачи из разных тем (в том числе №11).
- Итог и ДЗ, 4 мин.

Критерий освоения: ученик строит график с модулем или дробью и находит все значения параметра, 3 из 4 верно, с проверкой граничных значений.

Точка диагностики: задача 2 или 4; если не взял, остаться на ней и вернуться к выколотым точкам.

План домашнего задания

Карточка из 4 задач (ответы и ключевые точки проверки в конце карточки). Первые два дня: задачи 1–2; потом 3–4. Для трека С: все четыре; для А и В: №11 (соответствие графиков и формул) и тренажёр «новые числа».

План урока и домашнего задания · графики функций (№11, №22)

Индивидуальные занятия по 60 минут, 9 класс. Тема не помещается в одно занятие (построение и работа с прямой $y = m$, $y = kx$ — разные навыки), поэтому два урока. Для репетитора: на печать 2 страницы.

Рамка

Целевые задания ОГЭ: №11 (часть 1, соответствие графиков и формул) и №22 (часть 2, 2 балла). **Поток:** А (алгебра и анализ). **Предпосылки:** квадратные уравнения, линейная функция, модуль числа.

Предположение: на прошлых занятиях были квадратные уравнения и системы уравнений; если у вас иначе, замените блок «Возврат».

По трекам. **С** — оба урока целиком, №22 — основной результат. **В** — урок 1 без блока «оформление» (вместо него — №11 и построение параболы); из №22 только знакомство: прямая $y = m$ и парабола (тест, пятиминутки). **А** — задание 22 в программу не входит: берём только разделы 1–4 теории, пересечение с осями, вершину параболы и №11 (тест, пятиминутки, зачётный лист уровень 1).

Урок 1 · Построение графиков с модулем и дробью, выколотые точки (трек С)

Критерий освоения: по формуле с модулем или дробью без подсказок строит график (две формулы или сокращение), указывает вершины, нули и выколотые точки; из трёх заданий серии верно не менее двух.

Точка диагностики: задача 2 серии ($y = x|x| - 2|x| - 4x$): если ученик строит параболы целиком или путает вершины, к прямой $y = m$ не переходить, вернуться к правилу 5 теории и разобрать ещё одну функцию с модулем.

Минуты	Что делаем	Материал
0-5	Разминка. Три быстрых вопроса по прошлой теме (формула корней, теорема Виета) и вопрос на вход: «как найти вершину параболы $y = x^2 - 6x + 5$?» Ответ: $x_0 = 3$, $y_0 = -4$.	Теория, вопросы 6, 8
5-13	Возврат к раннему материалу (тема 2-4 занятия назад, предположительно квадратные уравнения). Две задачи: (1) $x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow x = -1$ и $x = 6$; (2) нули и вершина $y = x^2 - 6x + 5 \rightarrow$ нули 1 и 5, вершина (3; -4).	Лист, тест «квадратные уравнения»
13-25	Новая тема. Разобрать один пример полностью: $y = x^2 - 2 x - 3$. Раскрыть модуль ($x \geq 0$: $(x - 1)^2 - 4$; $x < 0$: $(x + 1)^2 - 4$), таблицы, график, «горб» в (0; -3), нули ± 3 . Затем 3 минуты: $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$, выколота (3; 6). Ученик пересказывает алгоритм.	Теория, разделы 5-7; памятка, образец
25-40	Отработка (15 мин). Серия со снятием опор, строим только график: (1) $y = x^2 - 4 x $ (копия примера: вершины (± 2 ; -4), О — «горб», нули -4, 0, 4); (2) $y = x x - 2 x - 4x$ (вершины (3; -9) и (-1; 1), нули -2, 0, 6); (3) $y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = x + 2$, выколота (3; 5); (4) кусочная $y = 3 - x$ при $x < 1$, $y = x^2 - 4x + 1$ при $x \geq 1$: (1; 2) выколота, (1; -2) закрашена, вершина (2; -3).	Разбор 5 задач (рисунки для сверки)
40-48	Оформление по критериям. Задачу 2 серии ученик записывает на листе как на бланке №2: формулы, таблицы, график. Учитель — эксперт: проверяет по чек-листу памятки, ученик находит, где потерял бы балл, и исправляет.	Памятка, чек-лист
48-56	Смешанная практика (без объявления темы): (1) знаки а и с по рисунку параболы $y = -x^2 + 2x - 3 \rightarrow a < 0$, $c < 0$; (2) система $x + y = 7$, $xy = 12 \rightarrow (3; 4)$, (4; 3); (3) сколько решений имеет $ x^2 - 4 = 3 \rightarrow 4$.	Пятиминутки, вариант А
56-60	Итог и ДЗ. Вопросы: «Как раскрыть модуль?», «Когда точку выкалывают?». ДЗ-1: тест «Графики функций» (цель — не менее 8 из 10) и три построения: а) $y = x^2 - 6 x + 5$ (вершины (± 3 ; -4), в нуле 5); б) $y = x x - x - 3x$ (вершины (2; -4) и (-1; 1)); в) $y = \frac{x^2 - 4x}{x - 4} = x$, выколота (4; 4).	Тест; лист для ДЗ

При нехватке времени: сокращаем блок «Новая тема» (дробь — на следующий урок) и серию до трёх задач. «Возврат» и «Смешанную практику» не убираем: они дают удержание.

Урок 2 · Прямые $y = m$ и $y = kx$: общие точки, оформление №22 (трек С)

Критерий освоения: по построенному графику находит все особые значения m (или k) и записывает ответ с верными границами; из трёх задач на 2 балла — не менее двух. **Точка диагностики:** задача 2 разбора (выколотые точки): если ученик записывает только $m = -9$, вернуться к правилу «выколотая точка забирает одну из общих точек» и решить аналог из зачётного листа (3.2).

Минуты	Что делаем	Материал
0-5	Разминка и проверка ДЗ-1. Сверяем вершины и выколотую точку по ключам; ошибка — на доску. Два вопроса: «Чему равно число общих точек графика и прямой $y = m$?», «Как найти k , если прямая $y = kx$ проходит через точку $(x_0; y_0)$?»	Теория, вопросы 16, 18
5-13	Возврат (тема 2-4 занятия назад, предположительно системы уравнений): (1) $y = x^2$ и $y = 2x - 1 \rightarrow (1; 1)$, одна точка (касание); (2) $x^2 + y^2 = 25$ и $x = 3 \rightarrow (3; 4), (3; -4)$.	Лист
13-25	Новая тема. Двигаем $y = m$ по графику $y = x^2 - 2 x - 3$ ($m = -4, -3,5, -3, 0$): 2, 4, 3, 2 точки. Ученик называет особые положения. Затем $y = kx$ на функции $y = \frac{2 x - 1}{ x - 2x^2}$: $k = 0$, потом $k > 0$, $k < 0$, прямая через выколотую точку. Ученик сам формулирует алгоритм до решения.	Теория, раздел 8; разбор, задача 3
25-40	Отработка (15 мин). Графики уже построены на уроке 1. (1) Парабола $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = m$: сколько точек при $m = -4, -5, 0 \rightarrow 1, 0, 2$. (2) Задача 1 разбора: ровно две точки $\rightarrow m = -9$; 1. (3) Задача 4: кусочная $\rightarrow m = -3$ и $-2 < m \leq 2$. (4) Задача 3: $y = kx \rightarrow k = -4; 0; 4$ (с опорой на алгоритм). Ученик сам проверяет границы.	Разбор 5 задач; тренажёр по шагам
40-48	Оформление по критериям. Задача 2 разбора (или 3.2 из зачётного листа) записывается целиком: ОДЗ, сокращение, таблица, график, особые m , ответ $-9; -8; 16$. Учитель проверяет по схеме 2 / 1 / 0 баллов, ученик исправляет.	Памятка, критерии
48-56	Смешанная практика: (1) соответствие А, Б, В — параболы, прямая, гипербола (зачётный лист 1.4 $\rightarrow$ 231); (2) найти k , если прямая $y = kx$ проходит через $(3; -6) \rightarrow k = -2$; (3) любая задача из прошлой темы по плану (предположительно квадратное неравенство).	Зачётный лист, 1.4
56-60	Итог и ДЗ-2. Что закрыли, что осталось открытым (kx с касанием). ДЗ: домашняя карточка (4 задачи), оформить полностью.	Домашняя карточка

При нехватке времени: в блоке «Новая тема» оставляем один пример на m (параболу с модулем) и один на k ; задачи 3 и 4 отработки переносим в ДЗ. Блоки «Возврат» и «Смешанная практика» не убираем; «Оформление» сокращаем до проверки одного решения по чек-листу.

План домашней работы

- После урока 1.** Тест (10 вопросов) и три построения (а, б, в). 25-30 минут.
- Дни 1-2 после урока 2.** Домашняя карточка: по две задачи в день, с таблицами и графиками.
- День 3.** Тренажёр «новые числа»: 10 задач, сначала типы, где были ошибки на уроке; записывать, где ошибся.
- Перед следующим занятием.** Три вопроса устного опроса (16, 17, 19): ученик отвечает первым делом.
- Следующее занятие.** Проверка карточки по ключевым точкам (10 минут), затем зачётный лист: уровень 1 обязателен, уровни 2 и 3 по треку.
- Через неделю.** Две задачи на графики вперемешку с другими темами (системы, неравенства), чтобы проверить, что навык удержался.