

Проценты: теория и устный опрос

Задание 21 ОГЭ, часть 2. Печать: 2 страницы А4.

Теория

1. Процент. Процентом называется одна сотая часть: $1\% = 1/100 = 0,01$. Поэтому $p\% = p/100$. Чтобы перевести проценты в десятичную дробь, делят на 100: $35\% = 0,35$; $7\% = 0,07$; $120\% = 1,2$. Чтобы перевести десятичную или обыкновенную дробь в проценты, умножают на 100: $0,6 = 60\%$; $3/4 = 75\%$.

2. Три основные задачи на проценты. 1) Найти $p\%$ от числа a : $a \cdot p/100$ (15% от 240: $240 \cdot 0,15 = 36$). 2) Найти число по его части: если $p\%$ числа равны b , то число равно $b : (p/100)$ (12% числа равны 30, число $30 : 0,12 = 250$). 3) Найти, сколько процентов число b составляет от числа a : $b/a \cdot 100\%$ (18 от 60: $18/60 \cdot 100\% = 30\%$). Всегда за 100% берут то число, с которым сравнивают («от чего»).

3. Увеличение и уменьшение на $p\%$. Увеличить число a на $p\%$ — значит умножить его на $(1 + p/100)$. Уменьшить на $p\%$ — умножить на $(1 - p/100)$. Эти множители называют коэффициентами: $+20\% \rightarrow 1,2$; $-15\% \rightarrow 0,85$; $+100\% \rightarrow 2$. Различай «на 25% больше» (коэффициент 1,25) и «составляет 25%» (коэффициент 0,25).

4. Последовательные изменения. Если величину меняют на проценты несколько раз, коэффициенты перемножают. Каждый следующий процент берётся от нового значения, поэтому складывать проценты нельзя. Пример: цену повысили на 20%, затем снизили на 20%: $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$, цена стала на 4% ниже начальной. Два повышения по 10%: $1,1 \cdot 1,1 = 1,21$, то есть +21%, а не +20%. Чтобы вернуться к начальному значению, делят на коэффициент.

5. Сложные проценты (банковский вклад). Если банк начисляет $p\%$ годовых на всю накопленную сумму, то через n лет сумма вклада равна $A \cdot (1 + p/100)^n$, где A — первоначальная сумма. После первого года: $A(1 + p/100)$, после второго: $A(1 + p/100)^2$.

6. Концентрация раствора и сплава. Концентрация (доля) вещества — это отношение массы вещества к массе всего раствора (сплава): $c = m(\text{вещества}) : m(\text{раствора})$. Отсюда $m(\text{вещества}) = m(\text{раствора}) \cdot c$. В воде вещества 0%, в чистом веществе 100%. При смешивании складываются массы растворов и массы вещества; концентрации складывать нельзя.

7. Как составляют уравнение. Заполняют таблицу: масса раствора, концентрация (десятичной дробью), масса вещества. Уравнение пишут по веществу: масса вещества в смеси равна сумме масс вещества в частях. При сушке масса сухого вещества не меняется, испаряется только вода. Если в задаче два условия и два неизвестных — составляют систему. Корни отбирают по смыслу: масса и цена положительны, процент снижения меньше 100.

Вопросы для устного опроса

Сначала вопрос, ответ учитель сверяет с правой колонкой.

№	Вопрос	Ответ
1	Что такое один процент? Запишите 1% дробью и десятичной дробью.	Одна сотая часть: $1\% = 1/100 = 0,01$.
2	Переведите в десятичные дроби: 35%, 7%, 120%.	0,35; 0,07; 1,2. Проценты делим на 100.
3	Переведите в проценты: 0,6; 0,04; 3/4.	60%; 4%; 75%. Умножаем на 100.
4	Как найти 15% от числа 240?	$240 \cdot 0,15 = 36$.
5	12% числа равны 30. Найдите число.	$30 : 0,12 = 250$.
6	Сколько процентов составляет 18 от 60?	$18/60 \cdot 100\% = 30\%$.
7	Цену 800 руб. повысили на 25%. Какова новая цена? Каким одним коэффициентом это считать?	Коэффициент 1,25; $800 \cdot 1,25 = 1000$ руб.

8	Каким коэффициентом записывается снижение на 15%?	$1 - 0,15 = 0,85$.
9	Цену повысили на 20%, потом снизили на 20%. Вернулась ли она к начальной?	Нет: $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$, цена на 4% ниже. Второй процент берут от новой цены.
10	Цена выросла на 10%, потом ещё на 10%. На сколько процентов она выросла за два раза?	$1,1 \cdot 1,1 = 1,21$, на 21%, а не на 20%.
11	Вкладчик положил 10 000 руб. под 10% годовых. Сколько будет через 2 года, если проценты начисляют на всю сумму?	$10\,000 \cdot 1,1^2 = 12\,100$ руб.
12	В 200 г раствора содержится 15% соли. Сколько в нём соли?	$200 \cdot 0,15 = 30$ г.
13	Сколько процентов вещества в воде и в чистом веществе? Можно ли складывать концентрации при смешивании?	В воде 0%, в чистом веществе 100%. Нельзя: складывают массы вещества и массы растворов.
14	Что обязательно должно быть в записи решения задания 21?	Что обозначили за x (с единицами и ограничением), выражения через x , уравнение, решение, отбор корня по смыслу, ответ.

Карточки-пятиминутки · проценты

Печать: оба варианта на одном листе А4, разрезать по пунктиру. Ответы внизу отрезать до раздачи.

Вариант А

Фамилия, имя: 5–7 мин

- 1.** Запишите 35% десятичной дробью, а 0,6 — в процентах.

[illegible]

Ответ: _____

- 2. Найдите 18% от 350.**

[illegible]

Ответ:

- 3.** Цена куртки 4000 руб. снижена на 15%. Какой стала цена?

[illegible]

Ответ:

4. Товар подорожал на 25%, а потом подешевел на 20%. Как изменилась цена по сравнению с первоначальной?

[illegible]

Ответ: _____

5. К 40 кг 20%-ного раствора соли добавили воду, и раствор стал 16%-ным. Сколько килограммов воды добавили? Составьте уравнение и решите.

[illegible]

Ответ: _____

Вариант Б

Фамилия, имя: 5–7 мин

1. Запишите 8% десятичной дробью, а 1,2 — в процентах.

[illegible]

Ответ: _____

- 2.** Найдите число, 15% которого равны 45.

[illegible]

Ответ:

- 3. Сколько процентов составляет 42 от 70?**

[illegible]

Ответ: _____

4. Вкладчик положил 20 000 руб. под 10% годовых. Сколько руб. будет на счёте через 2 года, если проценты начисляют раз в год на всю накопленную сумму?

[illegible]

Ответ: _____

5. К 30 кг 20%-ного раствора кислоты добавили 60%-ный раствор и получили 40%-ный. Сколько килограммов 60%-ного раствора добавили? Составьте уравнение и решите.

[illegible]

Ответ: _____

Ответы (отрезать до раздачи). Вариант А: 1) 0,35; 60%. 2) 63. 3) 3400 руб. 4) не изменилась ($1,25 \cdot 0,8 = 1$). 5) уравнение $0,2 \cdot 40 = 0,16(40 + x)$, $x = 10$ кг. **Вариант Б:** 1) 0,08; 120%. 2) 300. 3) 60%. 4) 24 200 руб. ($20\,000 \cdot 1,1^2$). 5) $0,2 \cdot 30 + 0,6x = 0,4(30 + x)$, $6 + 0,6x = 12 + 0,4x$, $x = 30$ кг.

Памятка: алгоритм и оформление, проценты (задание 21)

Решение записывают полностью на бланке ответов №2. Задание стоит 2 балла.

Алгоритм решения

1. **Прочитай, выпиши данные, определи тип.** Цена или вклад (коэффициенты); смесь или сплав (масса вещества); сушка (сухое вещество не меняется).
2. **Обозначь неизвестное.** «Пусть x кг (руб., %) — ...». Запиши ограничение: $x > 0$, для процента снижения $0 < x < 100$.
3. **Переведи проценты в десятичные дроби:** $20\% = 0,2$. Изменение на $p\%$ записывай коэффициентом $1 \pm p/100$.
4. **Определи, что сохраняется.** Для цен — коэффициенты перемножают. Для смесей и сплавов — масса вещества складывается: «вещества в первом + вещества во втором = вещества в смеси». Для сушки — сухого вещества до и после поровну. Заполни таблицу: масса $\cdot$ доля = масса вещества.
5. **Составь уравнение или систему и реши.** Раскрой скобки, собери подобные, найди x .
6. **Отбери корень по смыслу и проверь** подстановкой в условие.
7. **Запиши ответ** на тот вопрос, который задан (масса третьего сплава, а не x), в нужных единицах.

Формулы. $p\% = p/100$. Было a , стало $a(1 \pm p/100)$. Несколько изменений — коэффициенты перемножают. Вклад: $A(1 + p/100)^n$. Масса вещества = масса раствора $\cdot$ доля вещества. Вода 0% , чистое вещество 100% .

Что снимает баллы

- Сложены проценты вместо перемножения коэффициентов ($+20\%$ и -20% дают 0 , а не $0,96$).
- Сложены концентрации вместо масс вещества.
- Процент записан числом без деления на 100 (20 вместо $0,2$) — уравнение неверное, 0 баллов.
- Вычислительная ошибка при верном уравнении — 1 балл вместо 2 .
- Не отобран корень (в ответе отрицательная масса или процент больше 100).
- В ответ записано не то, что спрашивали (x вместо массы третьего сплава).
- Решение оборвано на уравнении, нет ответа.

Образец записи

Задача. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава на 3 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава.

Решение. Пусть x кг — масса первого сплава ($x > 0$), тогда масса второго $(x + 3)$ кг, масса третьего $(2x + 3)$ кг.

	масса, кг	доля меди	масса меди, кг
1-й	x	$0,1$	$0,1x$
2-й	$x + 3$	$0,4$	$0,4(x + 3)$
3-й	$2x + 3$	$0,3$	$0,3(2x + 3)$

Медь первого и второго сплавов вся перешла в третий. Составим уравнение:

$$0,1x + 0,4(x + 3) = 0,3(2x + 3).$$

$$0,1x + 0,4x + 1,2 = 0,6x + 0,9; 0,5x + 1,2 = 0,6x + 0,9; 0,1x = 0,3; x = 3.$$

Первый сплав весит 3 кг, второй 6 кг, третий $2 \cdot 3 + 3 = 9$ кг.

Проверка. Меди $0,3 + 2,4 = 2,7$ кг; $0,3 \cdot 9 = 2,7$ кг. Верно.

Ответ: 9 кг.

Где эксперт ищет баллы: 1) введено неизвестное с единицами; 2) выражены массы всех трёх сплавов; 3) уравнение составлено по массе меди; 4) уравнение решено верно; 5) дан ответ на заданный вопрос.

Зачётный лист · проценты (задание 21)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____ Баллы: ____ / 16 Оценка: ____

Три уровня. Уровень 1 обязателен для всех. Задачи уровней 2 и 3 оформляйте полностью, как на экзамене: «Пусть $x \dots$ », уравнение, решение, отбор корня, ответ.

Уровень 1 · базовый · по 1 баллу (4)

1. Найдите 30% от 450.

Ответ: _____

2. Сколько процентов составляет 56 от 80?

Ответ: _____

3. Цена пальто 2500 руб. снижена на 12%. Сколько рублей стало стоить пальто?

Ответ: _____

4. Найдите число, 60% которого равны 90.

Ответ:

Уровень 2 · как на ОГЭ · по 2 балла (6)

5. После повышения цены на 20% и последующего снижения на 25% товар стал стоить 1800 руб. Найдите первоначальную цену товара.

Ответ:

6. Вкладчик положил в банк 50 000 руб. под 12% годовых. Сколько рублей будет на его счёте через 2 года, если проценты начисляют раз в год на всю накопленную сумму?

Ответ:

7. Смешали 30%-ный и 50%-ный растворы кислоты и получили 10 кг 42%-ного раствора. Сколько килограммов 30%-ного раствора взяли?

Ответ: _____

Уровень 3 · повышенный · по 2 балла (6)

8. Цену товара повысили на $x\%$, а затем снизили на $x\%$. В результате товар стал дешевле первоначальной цены на 9%. Найдите x .

Ответ: _____

9. Первый сплав содержит 5% никеля, второй — 40% никеля. Масса второго сплава на 15 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 25% никеля. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____

10. Свежие грибы содержат 90% воды, а сушёные — 12% воды. Сколько килограммов сушёных грибов получится из 22 кг свежих?

Ответ: _____

Ответы и критерии (для учителя; ученику печатать страницы 1-2).

1-4) 135; 70%; 2200 руб. ($2500 \cdot 0,88$); 150 ($90 : 0,6$).

5) 2000 руб. Пусть x — первоначальная цена ($x > 0$); $x \cdot 1,2 \cdot 0,75 = 1800$; $0,9x = 1800$; $x = 2000$. Частая ошибка: сложить проценты ($+20 - 25 = -5\%$) и получить $1800 : 0,95 \approx 1894$.

6) 62 720 руб. $50\,000 \cdot 1,12^2 = 50\,000 \cdot 1,2544$. Частая ошибка: $50\,000 \cdot 1,24 = 62\,000$ (проценты не складывают).

7) 4 кг. x кг 30%-ного, $(10 - x)$ кг 50%-ного: $0,3x + 0,5(10 - x) = 0,42 \cdot 10$; $5 - 0,2x = 4,2$; $x = 4$ (50%-ного 6 кг).

8) 30. $(1 + x/100)(1 - x/100) = 0,91$; $1 - x^2/10\,000 = 0,91$; $x^2 = 900$; $x = 30$, корень -30 отбросить. Частая ошибка: ответ 9.

9) 105 кг. x кг первого, $(x + 15)$ второго, $(2x + 15)$ третьего: $0,05x + 0,4(x + 15) = 0,25(2x + 15)$; $0,45x + 6 = 0,5x + 3,75$; $x = 45$. Масса третьего $2 \cdot 45 + 15 = 105$. Частая ошибка: записать в ответ x .

10) 2,5 кг. Сухого вещества в свежих $10\% \cdot 22 = 2,2$ кг; в сушёных его 88%: $2,2 : 0,88 = 2,5$ кг. Частая ошибка: считать воду, а не сухое вещество.

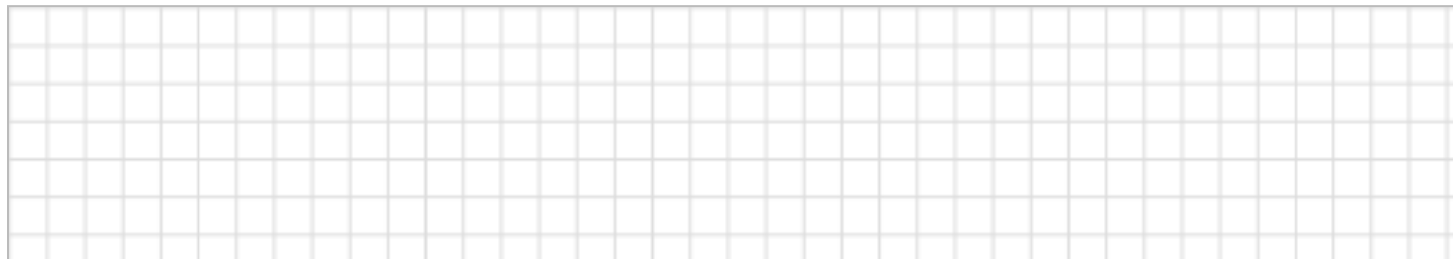
Критерии для задач 5, 7-10 (2 балла): 2 — верное уравнение, верное решение, отобран корень, ответ верный; 1 — ход решения верный, но одна вычислительная ошибка или не отобран корень; 0 — всё остальное. **Шкала (предложение, подстройте под себя):** 14-16 баллов — «5», 11-13 — «4», 7-10 — «3», меньше 7 — «2». Если уровень 1 набран не полностью, уровни 2-3 не засчитывают как уверенное владение темой.

Домашнее задание • проценты (задание 21)

Фамилия, имя: _____ Дата сдачи: _____

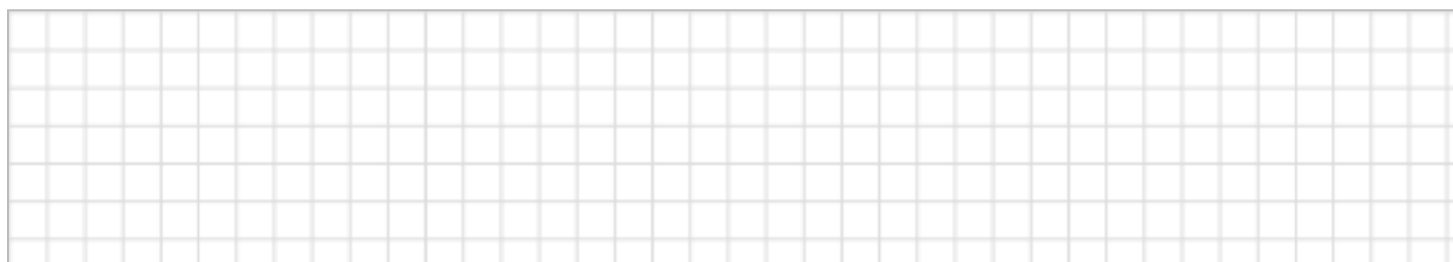
Решайте полностью, как на экзамене: «Пусть x ...», уравнение, решение, отбор корня, проверка, ответ. Сверяйтесь с памяткой.

1. Цену товара повысили на $x\%$, а затем снизили на $x\%$. В результате товар стал дешевле первоначальной цены на 16% . Найдите x .



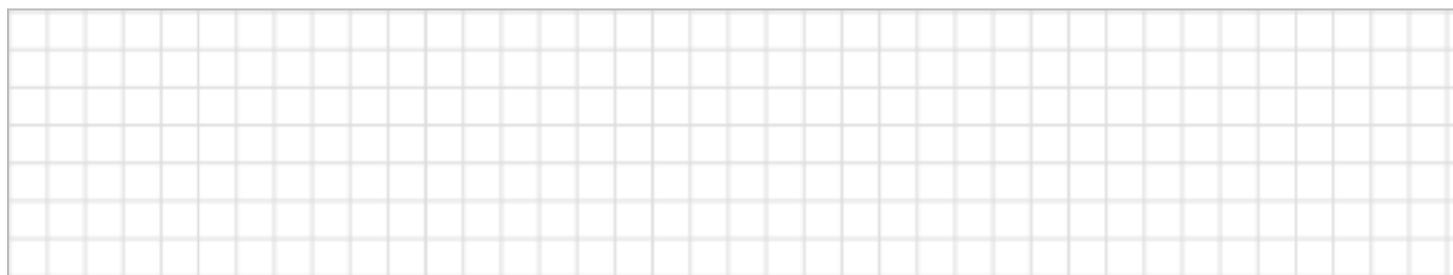
Ответ: _____

2. Вкладчик положил в банк 30 000 руб. под $x\%$ годовых. Через 2 года на его счёте оказалось 36 300 руб. (проценты начисляли раз в год на всю накопленную сумму). Найдите x .



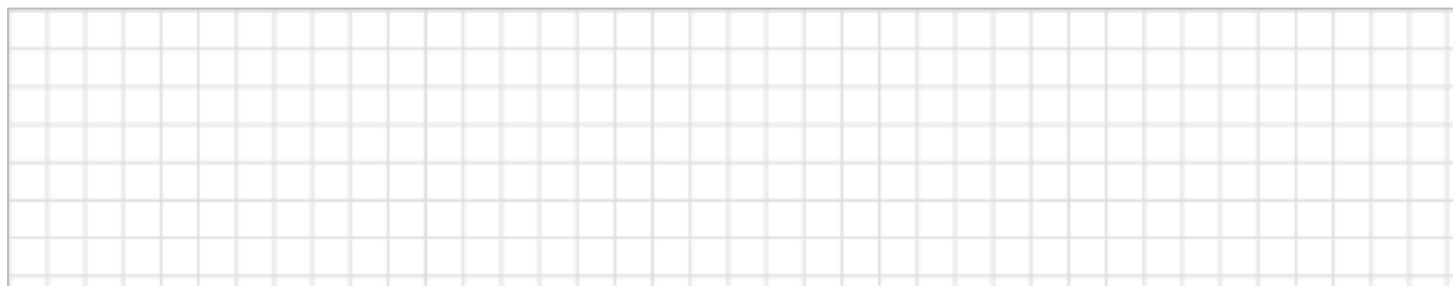
Ответ: _____

3. Смешали 25%-ный и 45%-ный растворы соли и получили 40 кг 36%-ного раствора. Сколько килограммов 25%-ного раствора взяли?



Ответ: _____

4. Первый сплав содержит 15% серебра, второй — 35% серебра. Масса второго сплава на 4 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 27% серебра. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.



Ответ: _____

Ответы и ключевые точки проверки (для учителя; печатать только первую страницу ученику).

1. **40.** Пусть $x\%$ — повышение и снижение, $0 < x < 100$; $(1 + x/100)(1 - x/100) = 0,84$ (начальная цена сокращается); $1 - x^2/10\,000 = 0,84$; $x^2 = 1600$; $x = 40$, корень -40 не подходит. Проверка: $1,4 \cdot 0,6 = 0,84$. Частая ошибка: «на 16% ниже» записать как 0,16 вместо 0,84.
2. **10.** $30\,000(1 + x/100)^2 = 36\,300$; $(1 + x/100)^2 = 1,21$; $1 + x/100 = 1,1$ или $-1,1$; $x = 10$, корень -210 не подходит. Проверка: $30\,000 \cdot 1,1 = 33\,000$; $33\,000 \cdot 1,1 = 36\,300$. Частая ошибка: $1 + 2x/100 = 1,21$, получают 10,5.
3. **18 кг.** x кг 25%-ного, $(40 - x)$ кг 45%-ного; по соли: $0,25x + 0,45(40 - x) = 0,36 \cdot 40$; $18 - 0,2x = 14,4$; $x = 18$ (45%-ного 22 кг). Проверка: $4,5 + 9,9 = 14,4$. Частая ошибка: сложить концентрации $25 + 45$.
4. **20 кг.** x кг первого, $(x + 4)$ второго, $(2x + 4)$ третьего; $0,15x + 0,35(x + 4) = 0,27(2x + 4)$; $0,5x + 1,4 = 0,54x + 1,08$; $0,04x = 0,32$; $x = 8$. Масса третьего $2 \cdot 8 + 4 = 20$. Проверка по серебру: $1,2 + 4,2 = 5,4 = 0,27 \cdot 20$. Частая ошибка: ответить 8 (масса первого).

Проценты (задание 21)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, часть 2, задание 21).

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи — похожая для самостоятельного решения (ответ в конце файла).

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Задачи разбора: 1. Два одинаковых снижения. 2. Вверх на $x\%$, вниз на $x\%$. 3. Смесь, два условия. 4. Сплавы. 5. Сушка.

Задача 1. Два одинаковых снижения

Условие. Цену на товар два раза подряд снижали на одно и то же число процентов. Сначала товар стоил 5000 рублей, после двух снижений стал стоить 4050 рублей. На сколько процентов снижали цену каждый раз?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Прочитай условие. Что мы видим?

Ученик: Задача на проценты, задание 21. Было 5000 рублей, стало 4050. Цену снижали два раза на одно и то же число процентов. Надо найти, на сколько процентов.

Учитель: Что здесь легко понять неверно?

Ученик: Что снижение одно, на двойное число процентов. А их два.

Учитель: Хорошо. А от какой цены считают второе снижение?

Ученик: От той, которая получилась после первого. Не от 5000.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как изменить число на p процентов? Сформулируй правило.

Ученик: Чтобы уменьшить число на p процентов, надо найти p процентов от него и вычесть. Или сразу умножить на $1 - p/100$.

Учитель: Верно, второй способ короче. Как называют такой множитель?

Ученик: Коэффициент. Для снижения на 15 процентов он равен 0,85.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какие шаги ты сделаешь до всякого счёта?

Ученик: Обозначу процент за x . Запишу цену после каждого снижения. Составлю уравнение. Решу. Выберу подходящий корень и проверю.

Учитель: Фиксируем. Так решают любую задачу, где неизвестен процент изменения:

1. Обозначить неизвестное x с ограничением.
2. Каждое изменение записать коэффициентом.
3. Составить уравнение: начальное значение $\cdot$ коэффициенты = конечное.
4. Решить уравнение.
5. Отобрать корень по смыслу, проверить подстановкой.
6. Записать ответ на вопрос задачи.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что обозначим за x и какие ограничения запишем?

Ученик: Пусть x процентов — на сколько снижали цену каждый раз. Он больше 0 и меньше 100.

Учитель: Почему меньше 100?

Ученик: Если снизить на 100 процентов, цена станет нулём, а потом снижать нечего.

Учитель: Чему равна цена после первого снижения?

Ученик: $5000 \cdot (1 - x/100)$.

Учитель: А после второго?

Ученик: Эту цену снова умножаем на $(1 - x/100)$. Получается $5000 \cdot (1 - x/100)^2$.

Если ученик ответит: $5000 \cdot (1 - 2x/100)$.

Учитель: Возьми $x = 10$ и посчитай два способа: сначала по твоей формуле, потом снизив 5000 на 10 процентов, а получившуюся цену ещё раз на 10 процентов. Совпало?

Ученик: По формуле 4000, вторым способом $4500 \cdot 0,9 = 4050$. Не совпало.

Учитель: Какое снижение ты не учёл?

Ученик: Что второй раз процент берут от меньшей цены, а не от 5000.

Учитель: Составь уравнение.

Ученик: $5000 \cdot (1 - x/100)^2 = 4050$.

Учитель: Как упростить?

Ученик: Разделить на 5000. Получится $(1 - x/100)^2 = 0,81$.

Учитель: Откуда взялось 0,81?

Ученик: $4050 : 5000 = 0,81$.

Учитель: Какое число в квадрате даёт 0,81?

Ученик: 0,9 и минус 0,9.

Учитель: Запиши оба случая до конца.

Ученик: $1 - x/100 = 0,9$, тогда $x/100 = 0,1$, $x = 10$. И $1 - x/100 = -0,9$, тогда $x/100 = 1,9$, $x = 190$.

Учитель: Какой корень подходит?

Ученик: 10. Корень 190 больше 100, он не подходит по ограничению.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: Снизим 5000 на 10 процентов: 4500. Ещё на 10 процентов: 4050. Совпало с условием.

Учитель: Как записать ответ?

Ученик: «Ответ: 10%». В решении задания 21 единицы пишут.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу в следующий раз?

Ученик: По словам «два раза подряд», «на одно и то же число процентов» и по тому, что известны начальная и конечная цена.

Учитель: Реши сам: цену снижали два раза подряд на одно и то же число процентов, было 2000 рублей, стало 1280 рублей. На сколько процентов снижали цену каждый раз?

Задача 2. Вверх на $x\%$, вниз на $x\%$

Условие. Цену товара повысили на $x\%$, а затем снизили на $x\%$. В результате товар стал дешевле первоначальной цены на 4%. Найдите x .

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Проценты, задание 21. Цену сначала повысили на x процентов, потом снизили на столько же. В итоге она на 4 процента меньше начальной. Надо найти x .

Учитель: Чего в условии нет, и мешает ли это?

Ученик: Нет самой цены. Наверное, обозначу её буквой a , и она сократится.

Учитель: А что в формулировке «на 4% дешевле» опасно?

Ученик: Можно принять 4 процента за итоговую цену. А итоговая цена — это не 4 процента, а на 4 процента меньше.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что мы знаем про несколько изменений подряд?

Ученик: Проценты не складывают. Коэффициенты перемножают, потому что каждый следующий процент берётся от нового значения.

Учитель: Какие здесь коэффициенты?

Ученик: Повышение на x процентов — $1 + x/100$. Снижение — $1 - x/100$.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм берём?

Ученик: Тот же, что в первой задаче: x с ограничением, коэффициенты, уравнение, решение, отбор корня, проверка, ответ.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Пусть a — первоначальная цена. Чему равна цена после обоих изменений?

Ученик: $a \cdot (1 + x/100) \cdot (1 - x/100)$.

Учитель: Какую долю от a составляет итоговая цена?

Ученик: 0,04, потому что на 4 процента меньше.

Если ученик ответит: 0,04.

Учитель: Допустим, $a = 100$ рублей. Цена стала на 4 процента ниже. Сколько рублей она стоит?

Ученик: 96.

Учитель: Какая доля от 100 это?

Ученик: 0,96.

Учитель: Составь уравнение.

Ученик: $(1 + x/100)(1 - x/100) = 0,96$. Буква x сократилась.

Учитель: Какую формулу сокращённого умножения ты видишь в левой части?

Ученик: Разность квадратов. Получается $1 - (x/100)^2$.

Учитель: Продолжай.

Ученик: $1 - x^2/10\,000 = 0,96$. Значит $x^2/10\,000 = 0,04$, $x^2 = 400$, $x = 20$ или $x = -20$.

Учитель: Какой корень берём?

Ученик: 20, потому что процент здесь положительный.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверим.

Ученик: $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$, то есть цена составляет 96 процентов, она на 4 процента ниже. Ответ: 20%.

Этап 6. Перенос

Учитель: Почему при «вверх на x , вниз на x » цена никогда не возвращается к начальной?

Ученик: Потому что получается $1 - (x/100)^2$, это меньше единицы.

Учитель: Реши сам: цену повысили на x процентов, потом снизили на x процентов, и она стала на 1% ниже первоначальной. Найдите x .

Задача 3. Смесь, два условия

Условие. Смешали 30%-ный и 60%-ный растворы кислоты и добавили 10 кг чистой воды, получили 36%-ный раствор кислоты. Если бы вместо воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 41%-ный раствор. Сколько килограммов 30%-ного раствора использовали?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Задача на смеси, задание 21. Есть два раствора, 30 и 60 процентов. Два случая: с водой получается 36 процентов, с 50-процентным раствором — 41. Надо найти массу 30-процентного раствора.

Учитель: Сколько неизвестных и сколько условий?

Ученик: Неизвестных две: массы двух растворов. Условий тоже два. Значит, нужна система.

Учитель: Что здесь ловушка?

Ученик: Вода входит в массу смеси, а кислоты в ней нет. И ответ надо дать про 30-процентный раствор, а не про 60-процентный.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как найти массу вещества в растворе?

Ученик: Массу раствора умножить на концентрацию. Концентрация — это масса вещества, делённая на массу раствора.

Учитель: Можно ли при смешивании складывать концентрации?

Ученик: Нет. Складывают массы вещества и массы растворов.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм для смесей и сплавов?

Ученик: Обозначить массы. Записать для каждого раствора массу вещества. Составить уравнение по веществу. Если условий два, составить систему. Решить, проверить, ответить.

Учитель: Фиксируем:

1. Обозначить массы x , y (больше 0).
2. Для каждой смеси: масса раствора $\cdot$ доля = масса вещества.
3. Уравнение по веществу: вещество частей = вещество смеси.
4. Два условия — система, решаем подстановкой.
5. Проверить по условию.
6. Ответить на вопрос задачи.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что обозначим?

Ученик: Пусть x кг — 30%-ного раствора, y кг — 60%-ного.

Учитель: Сколько килограммов кислоты в первой смеси, где добавили воду?

Ученик: $0,3x + 0,6y$. Вода кислоты не даёт.

Учитель: А чему равна масса всей первой смеси?

Ученик: $x + y + 10$.

Если ученик ответит: $x + y$.

Учитель: Из чего состоит смесь в первом случае?

Ученик: Из двух растворов и воды. Значит, ещё 10 кг.

Учитель: Составь первое уравнение.

Ученик: $0,3x + 0,6y = 0,36(x + y + 10)$.

Учитель: Упрости.

Ученик: $0,3x + 0,6y = 0,36x + 0,36y + 3,6$. Переносу: $0,24y - 0,06x = 3,6$. Делю на 0,06: $4y - x = 60$.

Учитель: Второй случай. Сколько кислоты в добавленных 10 кг 50%-ного раствора?

Ученик: 5 кг.

Учитель: Составь второе уравнение.

Ученик: $0,3x + 0,6y + 5 = 0,41(x + y + 10)$.

Учитель: Упрости.

Ученик: $0,3x + 0,6y + 5 = 0,41x + 0,41y + 4,1$. Переносу: $0,19y - 0,11x = -0,9$. Умножаю на 100: $19y - 11x = -90$.

Учитель: Как решим систему из $4y - x = 60$ и $19y - 11x = -90$?

Ученик: Из первого $x = 4y - 60$. Подставляю: $19y - 11(4y - 60) = -90$. Получается $19y - 44y + 660 = -90$, значит $-25y = -750$ и $y = 30$.

Учитель: А что спрашивали в задаче?

Ученик: Массу 30-процентного раствора. $x = 4 \cdot 30 - 60 = 60$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: Первый случай: $60 + 30 + 10 = 100$ кг смеси, кислоты $18 + 18 = 36$ кг, это 36 процентов.

Второй случай: кислоты $18 + 18 + 5 = 41$ кг из 100 кг, это 41 процент. Верно. Ответ: 60 кг.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь систему в задаче на смеси?

Ученик: Если известны две неизвестные массы и есть два условия, про которые можно написать уравнения.

Учитель: Реши сам: смешали 20%-ный и 60%-ный растворы кислоты и получили 8 кг 35%-ного раствора. Сколько килограммов 20%-ного раствора взяли?

Задача 4. Сплавы

Условие. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава на 3 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Сплавы, задание 21. Два сплава с медью 10 и 40 процентов, второй тяжелее первого на 3 кг. Из них сделали третий, в нём 30 процентов меди. Надо найти массу третьего.

Учитель: Что может сбить?

Ученик: Спрашивают массу третьего сплава, а не первого. И проценты надо переводить в десятичные дроби.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что остаётся неизменным, когда сплавляют два сплава?

Ученик: Масса меди. Вся медь первого и второго сплава попадает в третий. И массы тоже складываются.

Учитель: Запиши это как равенство словами.

Ученик: Медь первого сплава плюс медь второго равна меди третьего.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм?

Ученик: Тот же, что для смесей: массы через x , таблица «масса · доля = масса вещества», уравнение по веществу, решение, проверка, ответ на вопрос.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что обозначаем и как выражаем остальные массы?

Ученик: x кг — масса первого сплава. Второй — $x + 3$. Третий — сумма: $2x + 3$.

Учитель: Сколько меди в каждом сплаве?

Ученик: В первом $0,1x$, во втором $0,4(x + 3)$, в третьем $0,3(2x + 3)$.

Если ученик ответит: в третьем $0,3x$.

Учитель: Какая масса у третьего сплава?

Ученик: $2x + 3$, а не x . Значит, $0,3(2x + 3)$.

Учитель: Составь уравнение.

Ученик: $0,1x + 0,4(x + 3) = 0,3(2x + 3)$.

Учитель: Раскрой скобки.

Ученик: $0,1x + 0,4x + 1,2 = 0,6x + 0,9$. Слева $0,5x + 1,2$. Переносу: $0,3 = 0,1x$, значит $x = 3$.

Учитель: Это ответ?

Ученик: Нет. x — масса первого сплава. Третий весит $2 \cdot 3 + 3 = 9$ кг.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверим по меди.

Ученик: Первый сплав 3 кг, меди 0,3 кг. Второй 6 кг, меди 2,4 кг. Вместе 2,7 кг. В третьем 9 кг, 30 процентов — 2,7 кг. Совпало. Ответ: 9 кг.

Этап 6. Перенос

Учитель: Как ты узнаешь такую задачу?

Ученик: Есть «сплав», проценты вещества, массы связаны разницей, из двух получают третий. Уравнение по массе вещества.

Учитель: Реши сам: первый сплав содержит 20% олова, второй — 60% олова. Масса второго на 2 кг больше массы первого. Из них получили третий сплав с 45% олова. Найдите массу третьего сплава.

Задача 5. Сушка

Условие. Свежие яблоки содержат 80% воды, а сушёные — 20% воды. Сколько килограммов воды испарится при сушке 50 кг свежих яблок?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Проценты, задание 21. В свежих яблоках 80 процентов воды, в сушёных 20. Берём 50 кг свежих. Надо узнать, сколько воды испарилось.

Учитель: Что сбивает в этом условии?

Ученик: Проценты воды разные, а база разная: масса меняется. И спрашивают, сколько испарилось, а не сколько осталось.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что остаётся неизменным при сушке?

Ученик: Сухое вещество. Испаряется только вода.

Учитель: Как найти долю сухого вещества, если известна доля воды?

Ученик: Из 100 процентов вычесть долю воды.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм?

Ученик: Найти массу сухого вещества до сушки. Выразить массу после сушки через сухое вещество. Найти, сколько воды ушло. Проверить, ответить.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Сколько сухого вещества в 50 кг свежих яблок?

Ученик: Воды 80 процентов, сухого 20. $0,2 \cdot 50 = 10$ кг.

Если ученик ответит: $0,8 \cdot 50 = 40$ кг.

Учитель: Что ты нашёл, 80 процентов от 50?

Ученик: Воду. А мне нужно сухое вещество.

Учитель: Какую долю составляет сухое вещество в сушёных яблоках?

Ученик: $100 - 20 = 80$ процентов.

Учитель: Пусть m кг — масса сушёных яблок. Составь уравнение.

Ученик: $0,8m = 10$, потому что сухого вещества после сушки столько же, сколько было.

Учитель: Найди m .

Ученик: $m = 10 : 0,8 = 12,5$ кг.

Учитель: Что ответим на вопрос задачи?

Ученик: Испарилось $50 - 12,5 = 37,5$ кг воды.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверим по воде.

Ученик: В свежих воды 40 кг. В сушёных 20 процентов от 12,5 — это 2,5 кг. Испарилось $40 - 2,5 = 37,5$ кг. Совпало. Ответ: 37,5 кг.

Этап 6. Перенос

Учитель: Как узнаешь такую задачу?

Ученик: Слова «свежие» и «сушёные», воды разный процент, масса меняется. Сухое вещество постоянно.

Учитель: Реши сам: свежая трава содержит 75% воды, а сено — 15% воды. Сколько килограммов сена получится из 340 кг свежей травы?

Универсальный алгоритм для задания 21 (проценты)

1. Определи тип: цена и вклад (коэффициенты), смесь и сплав (масса вещества), сушка (сухое вещество).
2. Обозначь неизвестное с единицами и ограничением.
3. Переведи проценты в десятичные дроби.
4. Составь уравнение или систему: изменения перемножай, вещество складывай.
5. Реши, отбери корень, проверь подстановкой.
6. Запиши ответ на тот вопрос, который задан.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 20%. ($2000 \cdot (1 - x/100)^2 = 1280$; $(1 - x/100)^2 = 0,64$; $x = 20$.)
210. ($1 - x^2/10\,000 = 0,99$; $x^2 = 100$.)
3. 5 кг. ($0,2x + 0,6(8 - x) = 0,35 \cdot 8$; $4,8 - 0,4x = 2,8$; $x = 5$.)
4. 8 кг. ($0,2x + 0,6(x + 2) = 0,45(2x + 2)$; $0,8x + 1,2 = 0,9x + 0,9$; $x = 3$, третий $2 \cdot 3 + 2 = 8$.)
5. 100 кг. (Сухого в траве $0,25 \cdot 340 = 85$ кг; в сене его 85%: $85 : 0,85 = 100$.)

План урока и домашнего задания · проценты (задание 21)

Индивидуальное занятие, 60 минут, 9 класс, подготовка к ОГЭ. Для репетитора: на печать 1 страница.

Цель

К концу урока ученик называет алгоритм для задач на проценты, составляет уравнение по таблице «масса · доля = масса вещества» и оформляет одну задачу так, чтобы эксперт поставил 2 балла.

Ход урока

Минуты	Что делаем	Материал
0-5	Устный опрос. Пять вопросов подряд без подготовки: 4, 5, 7, 9, 12. Ошибку не поправляем, а записываем: вернёмся на 5-й минуте второй части.	Теория и опрос, вопросы
5-12	Открытие. Вопрос: цену подняли на 20%, потом снизили на 20%, вернулась ли она? Ученик прогнозирует, потом считает на 1000 руб. Вывод: коэффициенты перемножают, процент берётся от нового значения. Фиксируем правила 3-4.	Теория, правила 3-4; чистый лист
12-27	Разбор вслух двух задач по этапам диалога «Что мы видим — правило — алгоритм — решение — проверка»: задача 1 (двойное снижение) и задача 4 (сплавы). Ученик сам называет алгоритм до счёта, в таблицу для сплава записывает сам.	Диалог-разбор, части 1 и 4; разбор 5 задач
27-37	Пятиминутка (вариант А или Б), без подсказок, 7 минут, затем сверка и разбор ошибок.	Карточки-пятиминутки
37-50	Самостоятельная задача уровня «ОГЭ»: задача 5 (сушка) или задача 3 (система) в интерактивном тренажёре; затем та же задача записывается на листе как на экзамене.	Тренажёр по шагам; памятка
50-57	Учитель — эксперт. Проверяем запись по критериям памятки: 5 пунктов, где ставится балл. Ученик находит у себя, где потерял бы балл, и переписывает.	Памятка, образец записи
57-60	Итог и ДЗ. Вопрос: «По каким признакам ты узнаешь такую задачу?» (слова «процентов», «сплав», «раствор», «вклад», «подорожал»). Выдаём домашнюю карточку.	Домашняя карточка

Как подстроить под уровень

- **Трек А:** в блоке 12-27 разбираем задачи 1 и 4 целиком по диалогу; самостоятельно — задача 5 по шагам в тренажёре; ДЗ — задачи 1 и 3 из карточки.
- **Трек В:** план как есть; задача 4 решается учеником сразу, учитель только слушает.
- **Трек С:** вместо задач 1 и 4 в блоке 12-27 берём 2 и 3; в блоке 37-50 — задача 3 без подсказок; добавить вопрос «Можно ли решить быстрее?» (задача 2: формула разности квадратов).

Домашнее задание

1. Домашняя карточка из 4 задач (задание 21), оформить полностью как на экзамене. Срок — к следующему занятию.
2. Интерактивный тест «Проценты» (10 вопросов), результат записать на карточке. Цель — не меньше 8.
3. Тренажёр «новые числа каждый раз»: 10 задач, любые типы; записать, какие типы вызвали ошибки.

Следующее занятие

Первые 5 минут — три вопроса из опроса на прошлую тему (вопросы 9, 10, 13). Затем проверка ДЗ по ключевым точкам. Через неделю зачётный лист: уровень 1 обязателен, уровни 2 и 3 по треку. Если за уровень 1 меньше 4 баллов, возвращаемся к правилам 2-4 и к пятиминутке.