

Системы уравнений: теория и устный опрос

Задание 20 ОГЭ (часть 2, 2 балла). Печать: 2 листа А4. Определения и правила записаны близко к школьному учебнику (алгебра, 9 класс).

1. Решение системы

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.
Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Решение записывают парой **(x; y)**: сначала x, потом y. Пары (3; 4) и (4; 3) — разные решения.

Пример. Пара (2; 1) — решение системы
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$
 Проверка: $2 + 1 = 3$ и $4 + 1 = 5$, оба равенства верны.

2. Способ подстановки

- Выразить из какого-либо уравнения одну переменную через другую (удобнее из линейного).
- Подставить полученное выражение в другое уравнение.
- Решить уравнение с одной переменной.
- Найти соответствующие значения второй переменной.
- Записать ответ: пары (x; y).

Если в системе есть линейное уравнение, подставляем из него. Тогда нелинейное уравнение превращается в квадратное с одной переменной.

3. Способ сложения

- Умножить уравнения почленно на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными.
- Сложить уравнения почленно.
- Решить получившееся уравнение с одной переменной.
- Найти вторую переменную подстановкой.

Если в обоих уравнениях стоят только x^2 и y^2 (без x, y и xy), складываем или вычитаем уравнения и находим x^2 и y^2 . Каждый квадрат даёт два значения: $\pm$.

8. Проверка и запись ответа

Подставьте каждую пару в оба уравнения. Ответ запишите парами через запятую: (1; 2), (2; 1). Если в условии сказано «запишите решение с наибольшим x», выберите пару и запишите её целиком.

4. Произведение равно нулю

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Уравнение $(x - 2)(y + 1) = 0$ разбиваем на две системы: с $x = 2$ и с $y = -1$. Решения объединяем; одинаковые пары записываем один раз.

Однородное уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ раскладываем на множители: $(x - y)(x - 2y) = 0$.

5. Симметричные системы

Если $x + y = s$ и $xy = p$, то x и y — корни квадратного уравнения $t^2 - st + p = 0$ (теорема, обратная теореме Виета).

Полезные формулы: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$; $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$.

Если в системе есть $x^2 + y^2$ и $x + y$, обозначаем $s = x + y$, $p = xy$. Найдя s и p, решаем $t^2 - st + p = 0$. Для $t_1 \neq t_2$ получаем две пары: $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$.

6. Дроби и замена переменной

Если в системе есть дроби, сначала записываем ОДЗ: знаменатели не равны нулю. Для выражения $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ вводим $t = \frac{x}{y}$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$.

Решив уравнение для t, возвращаемся к x и y. Каждое значение t даёт свою ветку; ветка может не дать решений.

7. Графический способ

Решения системы — координаты общих точек графиков уравнений. Число решений равно числу общих точек.

Уравнение	График
$ax + by = c$	прямая
$x^2 + y^2 = r^2$	окружность, центр (0; 0), радиус r
$y = x^2 + bx + c$	парабола
$y = k/x$	гипербола

Прямая и окружность имеют 0, 1 или 2 общие точки. Точку пересечения по рисунку не всегда можно прочитать точно, поэтому график надёжно даёт число решений, а сами решения находим вычислением.

Вопросы для устного опроса (с ответами)

Ученику читают вопрос, ответ закрыт. Ответ «примерно» засчитывается, если сохранён смысл правила.
Для 5-минутного опроса: вопросы 1, 5, 7, 9, 12.

№	Вопрос	Ответ
1	Что называют решением системы двух уравнений с двумя переменными?	Пару значений переменных, обращающую каждое уравнение системы в верное равенство.
2	Чем отличаются решения (2; 5) и (5; 2)?	Это разные решения: на первом месте x , на втором y . Для несимметричной системы подходить может только одна из пар.
3	Что значит «решить систему»?	Найти все её решения или доказать, что решений нет.
4	Какие способы решения систем вы знаете?	Подстановка, сложение, графический способ, замена переменных.
5	Когда удобнее подстановка?	Когда одно из уравнений линейное: из него легко выразить переменную.
6	Когда удобнее сложение?	Когда коэффициенты при одной переменной равны или противоположны, например в системе из двух уравнений с x^2 и y^2 .
7	Как решить систему $x + y = s$, $xy = p$?	Составить уравнение $t^2 - st + p = 0$: его корни — это x и y ; записать обе пары.
8	Как выразить $x^2 + y^2$ через $x + y$ и xy ?	$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.
9	Что делать с уравнением $(x - a)(y - b) = 0$?	Разбить на две системы ($x = a$ и $y = b$), решить каждую и объединить ответы; одинаковые пары записать один раз.
10	Что нужно записать в системе с дробями?	ОДЗ: знаменатели не равны нулю; в конце проверить, что найденные пары в ОДЗ входят.
11	Сколько решений может быть у системы «окружность и прямая»?	Ни одного, одно (касание) или два.
12	Нашли значения x . Что дальше?	Для каждого x найти y и записать пары. Ответ « $x = 2$, $x = -3$ » — неполный.
13	Что значит «запишите решение с наибольшим x »?	Из всех пар выбрать ту, где x больше, и записать её целиком, обе координаты.
14	Почему нельзя делить обе части уравнения на переменную?	Переменная может быть равна нулю: при делении теряется корень. Правильно вынести за скобку.
15	Как проверить решение системы?	Подставить пару в оба уравнения: оба равенства должны быть верными.

Типичные ошибки (на что смотреть)

1. Нашли x и не нашли y : в ответе нет пар.
2. Потеряли ветку: $(x - a)(y - b) = 0$ решили только для $x = a$.
3. Одну и ту же пару записали дважды или не заметили, что она общая для двух веток.
4. В системе с дробями не записали ОДЗ и не проверили найденные пары.
5. Из $x^2 = 9$ записали только $x = 3$.
6. Нашли $s = x + y$, но не вернулись к $t^2 - st + p = 0$.