

Системы уравнений: теория и устный опрос

Задание 20 ОГЭ (часть 2, 2 балла). Печать: 2 листа А4. Определения и правила записаны близко к школьному учебнику (алгебра, 9 класс).

1. Решение системы

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.
Решить систему — значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Решение записывают парой **(x; y)**: сначала x, потом y. Пары (3; 4) и (4; 3) — разные решения.

Пример. Пара (2; 1) — решение системы
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$
 Проверка: $2 + 1 = 3$ и $4 + 1 = 5$, оба равенства верны.

2. Способ подстановки

1. Выразить из какого-либо уравнения одну переменную через другую (удобнее из линейного).
2. Подставить полученное выражение в другое уравнение.
3. Решить уравнение с одной переменной.
4. Найти соответствующие значения второй переменной.
5. Записать ответ: пары (x; y).

Если в системе есть линейное уравнение, подставляем из него. Тогда нелинейное уравнение превращается в квадратное с одной переменной.

3. Способ сложения

1. Умножить уравнения почленно на такие числа, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными.
2. Сложить уравнения почленно.
3. Решить получившееся уравнение с одной переменной.
4. Найти вторую переменную подстановкой.

Если в обоих уравнениях стоят только x^2 и y^2 (без x, y и xy), складываем или вычитаем уравнения и находим x^2 и y^2 . Каждый квадрат даёт два значения: $\pm$.

8. Проверка и запись ответа

Подставьте каждую пару в оба уравнения. Ответ запишите парами через запятую: (1; 2), (2; 1). Если в условии сказано «запишите решение с наибольшим x», выберите пару и запишите её целиком.

4. Произведение равно нулю

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Уравнение $(x - 2)(y + 1) = 0$ разбиваем на две системы: с $x = 2$ и с $y = -1$. Решения объединяем; одинаковые пары записываем один раз.

Однородное уравнение $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ раскладываем на множители: $(x - y)(x - 2y) = 0$.

5. Симметричные системы

Если $x + y = s$ и $xy = p$, то x и y — корни квадратного уравнения $t^2 - st + p = 0$ (теорема, обратная теореме Виета).

Полезные формулы: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$; $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$.

Если в системе есть $x^2 + y^2$ и $x + y$, обозначаем $s = x + y$, $p = xy$. Найдя s и p, решаем $t^2 - st + p = 0$. Для $t_1 \neq t_2$ получаем две пары: $(t_1; t_2)$ и $(t_2; t_1)$.

6. Дроби и замена переменной

Если в системе есть дроби, сначала записываем ОДЗ: знаменатели не равны нулю. Для выражения $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ вводим $t = \frac{x}{y}$, тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$.

Решив уравнение для t, возвращаемся к x и y. Каждое значение t даёт свою ветку; ветка может не дать решений.

7. Графический способ

Решения системы — координаты общих точек графиков уравнений. Число решений равно числу общих точек.

Уравнение	График
$ax + by = c$	прямая
$x^2 + y^2 = r^2$	окружность, центр (0; 0), радиус r
$y = x^2 + bx + c$	парабола
$y = k/x$	гипербола

Прямая и окружность имеют 0, 1 или 2 общие точки. Точку пересечения по рисунку не всегда можно прочитать точно, поэтому график надёжно даёт число решений, а сами решения находим вычислением.

Вопросы для устного опроса (с ответами)

Ученику читают вопрос, ответ закрыт. Ответ «примерно» засчитывается, если сохранён смысл правила.
Для 5-минутного опроса: вопросы 1, 5, 7, 9, 12.

№	Вопрос	Ответ
1	Что называют решением системы двух уравнений с двумя переменными?	Пару значений переменных, обращающую каждое уравнение системы в верное равенство.
2	Чем отличаются решения (2; 5) и (5; 2)?	Это разные решения: на первом месте x , на втором y . Для несимметричной системы подходить может только одна из пар.
3	Что значит «решить систему»?	Найти все её решения или доказать, что решений нет.
4	Какие способы решения систем вы знаете?	Подстановка, сложение, графический способ, замена переменных.
5	Когда удобнее подстановка?	Когда одно из уравнений линейное: из него легко выразить переменную.
6	Когда удобнее сложение?	Когда коэффициенты при одной переменной равны или противоположны, например в системе из двух уравнений с x^2 и y^2 .
7	Как решить систему $x + y = s$, $xy = p$?	Составить уравнение $t^2 - st + p = 0$: его корни — это x и y ; записать обе пары.
8	Как выразить $x^2 + y^2$ через $x + y$ и xy ?	$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.
9	Что делать с уравнением $(x - a)(y - b) = 0$?	Разбить на две системы ($x = a$ и $y = b$), решить каждую и объединить ответы; одинаковые пары записать один раз.
10	Что нужно записать в системе с дробями?	ОДЗ: знаменатели не равны нулю; в конце проверить, что найденные пары в ОДЗ входят.
11	Сколько решений может быть у системы «окружность и прямая»?	Ни одного, одно (касание) или два.
12	Нашли значения x . Что дальше?	Для каждого x найти y и записать пары. Ответ « $x = 2$, $x = -3$ » — неполный.
13	Что значит «запишите решение с наибольшим x »?	Из всех пар выбрать ту, где x больше, и записать её целиком, обе координаты.
14	Почему нельзя делить обе части уравнения на переменную?	Переменная может быть равна нулю: при делении теряется корень. Правильно вынести за скобку.
15	Как проверить решение системы?	Подставить пару в оба уравнения: оба равенства должны быть верными.

Типичные ошибки (на что смотреть)

1. Нашли x и не нашли y : в ответе нет пар.
2. Потеряли ветку: $(x - a)(y - b) = 0$ решили только для $x = a$.
3. Одну и ту же пару записали дважды или не заметили, что она общая для двух веток.
4. В системе с дробями не записали ОДЗ и не проверили найденные пары.
5. Из $x^2 = 9$ записали только $x = 3$.
6. Нашли $s = x + y$, но не вернулись к $t^2 - st + p = 0$.

Карточки-пятиминутки · системы уравнений

Два варианта на одном листе А4: вырезать по пунктирной линии. 5 заданий по 1 баллу; задание засчитывается, если найдены все пары. «5» — 5 баллов, «4» — 4 балла, «3» — 3 балла.

Вариант А

Фамилия: _____ Время: 7 минут.
Запишите все решения парами (x; y).

1. Решите систему:
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

2. Решите систему:
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

3. Решите систему:
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

4. Решите систему:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$$

Ответ: _____

5. Решите систему:
$$\begin{cases} (x-2)(y-3) = 0 \\ x+y = 6 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

Вариант Б

Фамилия: _____ Время: 7 минут.
Запишите все решения парами (x; y).

1. Решите систему:
$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

2. Решите систему:
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

3. Решите систему:
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

4. Решите систему:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = -16 \end{cases}$$

Ответ: _____

5. Решите систему:
$$\begin{cases} (x+1)(y-4) = 0 \\ x+y = 7 \end{cases}$$

[illegible]

Ответ: _____

Ответы (для учителя). Виды заданий: 1 — сложение или подстановка; 2 — линейное + $x^2 + y^2$ (подстановка); 3 — сумма и произведение (Виета); 4 — сложение: x^2 и y^2 ; 5 — произведение равно нулю.

№	Вариант А	Вариант Б
1	(2; 3)	(2; 2)
2	(2; 3), (−3; −2)	(4; 3), (−3; −4)
3	(3; 5), (5; 3)	(4; 5), (5; 4)
4	(5; 4), (5; −4), (−5; 4), (−5; −4)	(3; 5), (3; −5), (−3; 5), (−3; −5)
5	(2; 4), (3; 3)	(−1; 8), (3; 4)

Разбор 5 задач повышенной сложности · системы уравнений (№20)

Каждая задача: условие, что видим, правило, алгоритм, решение, проверка, ответ и типичная ловушка. Ответ записывается парами.

Задача 1. Дробное уравнение и замена $t = x/y$

Условие. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

Что видим. Система с дробью. Знаменатели x и y , поэтому нужно ОДЗ. В первом уравнении дроби x/y и y/x взаимно обратны: удобна замена $t = x/y$.

Правило. Дробь определена, когда знаменатель не равен нулю. Для взаимно обратных величин t и $1/t$: $t + 1/t = a$ сводится к квадратному уравнению (умножаем на t при $t \neq 0$).

Алгоритм.

1. Записать ОДЗ.
2. Ввести $t = x/y$ и решить уравнение для t .
3. Для каждого t выразить x через y и подставить во второе уравнение.
4. Найти x и y , проверить по ОДЗ.
5. Записать пары.

Решение.

1. ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0$.
2. Пусть $t = x/y$, тогда $y/x = 1/t$: $t + 1/t = 5/2$. Умножим на $2t$ ($t \neq 0$): $2t^2 + 2 = 5t$, $2t^2 - 5t + 2 = 0$, $D = 25 - 16 = 9$, $t = (5 \pm 3)/4$, $t = 2$ или $t = 1/2$.
3. Если $t = 2$, то $x = 2y$. Подставим: $4y^2 - y^2 = 3$, $y^2 = 1$, $y = 1$ или $y = -1$. Тогда $x = 2$ или $x = -2$: пары $(2; 1)$ и $(-2; -1)$.
4. Если $t = 1/2$, то $x = y/2$. Подставим: $y^2/4 - y^2 = 3$, $-3y^2/4 = 3$, $y^2 = -4$. Решений нет.
5. Найденные числа не равны нулю, ОДЗ выполнено.

Проверка. $(2; 1)$: $2/1 + 1/2 = 5/2$, $4 - 1 = 3$. $(-2; -1)$: $(-2)/(-1) + (-1)/(-2) = 2 + 1/2 = 5/2$, $4 - 1 = 3$. Оба верно.

Ответ: $(2; 1)$, $(-2; -1)$

Ловушка. Не записать ОДЗ. Найти только x и забыть y . Искать решения во второй ветке «насильно»: там $y^2 = -4$, вывод «решений нет» тоже надо записать.

Задача 2. Сложение: только x^2 и y^2

Условие. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 30 \\ 3x^2 - y^2 = 23 \end{cases}$$

Что видим. В обоих уравнениях только x^2 и y^2 (нет x , y , xy). Подходит сложение с умножением на число.

Правило. Способ сложения: умножаем уравнения на числа так, чтобы коэффициенты при одной переменной стали противоположными, затем складываем.

Алгоритм.

1. Выбрать переменную, которую исключаем (здесь y^2).
2. Умножить уравнение и сложить.
3. Найти x^2 , затем y^2 .
4. Извлечь корни: каждый квадрат даёт два значения.
5. Составить все пары.

Решение.

1. Умножим второе уравнение на 3: $9x^2 - 3y^2 = 69$.
2. Сложим с первым: $2x^2 + 9x^2 + 3y^2 - 3y^2 = 30 + 69$, $11x^2 = 99$, $x^2 = 9$, $x = 3$ или $x = -3$.
3. Из второго уравнения $y^2 = 3x^2 - 23 = 27 - 23 = 4$, $y = 2$ или $y = -2$.
4. Знаки x и y не связаны (в системе только квадраты), поэтому подходят все четыре сочетания.

Проверка. $(3; 2)$: $18 + 12 = 30$, $27 - 4 = 23$. Остальные пары дают те же квадраты, значит тоже верны.

Ответ: $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; 2)$, $(-3; -2)$

Ловушка. Записать одну пару $(3; 2)$ вместо четырёх. Взять $x = 3$ и забыть $x = -3$.

Задача 3. Симметричная система: $s = x + y$ и $p = xy$

Условие. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 12 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Что видим. Система симметричная: x и y входят одинаково. Левую часть первого уравнения можно записать через $s = x + y$ и $p = xy$.

Правило. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$. Если $x + y = s$ и $xy = p$, то x и y — корни уравнения $t^2 - st + p = 0$.

Алгоритм.

1. Выразить первое уравнение через s и p .
2. Подставить p и найти s .
3. Для каждого s решить $t^2 - st + p = 0$.
4. Записать пары (с учётом порядка).

Решение.

1. $x^2 + y^2 = s^2 - 2p = s^2 - 8$. Первое уравнение: $s^2 - 8 + s = 12$, $s^2 + s - 20 = 0$, $D = 81$, $s = (-1 \pm 9)/2$, $s = 4$ или $s = -5$.
2. Если $s = 4$, $p = 4$: $t^2 - 4t + 4 = 0$, $(t - 2)^2 = 0$, $t = 2$. Получаем $x = y = 2$: одна пара (2; 2).
3. Если $s = -5$, $p = 4$: $t^2 + 5t + 4 = 0$, $t = -1$ или $t = -4$. Пары (-1; -4) и (-4; -1).

Проверка. (2; 2): $4 + 4 + 2 + 2 = 12$, $2 \cdot 2 = 4$. (-1; -4): $1 + 16 - 1 - 4 = 12$, $(-1)(-4) = 4$. По симметрии (-4; -1) тоже верна.

Ответ: (2; 2), (-1; -4), (-4; -1)

Ловушка. При двойном корне $t = 2$ записать две пары (2; 2) и (2; 2): пара одна. Потерять $s = -5$.

Задача 4. Однородное уравнение: разложение на множители

Условие. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Что видим. Первое уравнение однородное: все члены второй степени. Его левую часть можно разложить на множители.

Правило. Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bxy + cy^2$ раскладывают, как трёхчлен относительно x с коэффициентом y .

Алгоритм.

1. Разложить левую часть: $(x - y)(x - 2y)$.
2. Записать две системы.
3. Решить каждую подстановкой.
4. Проверить обе пары.

Решение.

1. $x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - y)(x - 2y)$. Проверка раскрытием: $x^2 - 2xy - xy + 2y^2 = x^2 - 3xy + 2y^2$.
2. Случай 1: $x - y = 0$, то есть $x = y$. Из $x + y = 6$ получаем $2y = 6$, $y = 3$, $x = 3$. Пара (3; 3).
3. Случай 2: $x - 2y = 0$, то есть $x = 2y$. Из $x + y = 6$ получаем $3y = 6$, $y = 2$, $x = 4$. Пара (4; 2).

Проверка. (3; 3): $9 - 27 + 18 = 0$, $3 + 3 = 6$. (4; 2): $16 - 24 + 8 = 0$, $4 + 2 = 6$.

Ответ: (3; 3), (4; 2)

Ловушка. Решить только один случай. Делить на y^2 и потерять $y = 0$: безопаснее разложить на множители.

Задача 5. Произведение равно нулю: две системы

Условие. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (x - 2)(y + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Что видим. Первое уравнение — произведение, равное нулю. Оно распадается на два условия: $x = 2$ или $y = -1$.

Правило. Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Алгоритм.

1. Разбить на две системы.
2. Решить каждую.
3. Объединить решения, совпавшие записать один раз.
4. Проверить.

Решение.

1. Система I: $x = 2$ и $x^2 + y^2 = 5$. Тогда $4 + y^2 = 5$, $y^2 = 1$, $y = 1$ или $y = -1$. Пары $(2; 1)$ и $(2; -1)$.
2. Система II: $y = -1$ и $x^2 + y^2 = 5$. Тогда $x^2 + 1 = 5$, $x^2 = 4$, $x = 2$ или $x = -2$. Пары $(2; -1)$ и $(-2; -1)$.
3. Пара $(2; -1)$ встретилась в обеих системах. В ответ её записываем один раз: всего три решения.

Проверка. $(2; 1)$: $0 \cdot 2 = 0$, $4 + 1 = 5$. $(2; -1)$: $0 \cdot 0 = 0$, $4 + 1 = 5$. $(-2; -1)$: $(-4) \cdot 0 = 0$, $4 + 1 = 5$.

Ответ: $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; -1)$

Ловушка. Записать четыре пары: $(2; -1)$ дважды. Решить только одну ветку.

Памятка: алгоритм и оформление, системы уравнений (№20)

№20 оформляют полностью на бланке №2 (2 балла). В ответе — пары чисел (x; y). Ход решения должен быть виден эксперту.

Алгоритм решения системы

1. **Посмотри на уравнения.** Какие члены есть: x^2 , y^2 , xy , дроби, линейное уравнение, произведение?
2. **Если есть дробь — запиши ОДЗ:** $x \neq 0$, $y \neq 0$ и т. д.
3. **Выбери способ** по таблице ниже. Напиши фразу: «Из второго уравнения выразим x » или «Сложим уравнения».
4. **Сведи к одному уравнению с одной переменной** и реши его (дискриминант, Виета, разложение).
5. **Для каждого найденного значения найди вторую переменную.** Запиши пары.
6. **Проверь** пары по ОДЗ и подстановкой хотя бы в одно уравнение (лучше в оба).
7. **Запиши ответ** парами: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Совпавшие пары — один раз.

Какой способ выбрать

Что вижу	Что делаю
Есть линейное уравнение	Подстановка: выразить переменную из линейного.
Только x^2 и y^2 в обоих	Сложение или вычитание (с умножением), затем $\pm$.
$x + y$ и xy (или $x^2 + y^2$)	$s = x + y$, $p = xy$; $t^2 - st + p = 0$.
Произведение равно 0	Две системы: каждый множитель = 0.
Однородное уравнение второй степени	Разложить на множители $(x - ay)(x - by) = 0$.
$x/y + y/x$ или другие дроби	ОДЗ; замена $t = x/y$; потом $x = ty$.
Формулы. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$. $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$. Корни $t^2 - st + p = 0$ — это x и y . Из $x^2 = a$ ($a > 0$): $x = \pm\sqrt{a}$.	

Что снимает баллы

- В ответе только x (или только y), нет пар.
- Потеряна ветка: решена одна из двух систем (произведение, однородное).
- Из $x^2 = 4$ записано только $x = 2$.
- Совпавшая пара записана дважды или не отброшена после проверки ОДЗ.
- Деление обеих частей на переменную: теряется корень (или решение с нулём).
- Вычислительная ошибка при верном ходе: 1 балл вместо 2. Только ответ без хода: 0 баллов.

Образец записи (№20)

Задача. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Решение. Пусть $x + y = s$, $xy = p$. Тогда $x^2 + y^2 = s^2 - 2p$.
Из условия $s = 7$ и $25 = 7^2 - 2p$; $2p = 49 - 25 = 24$, $p = 12$.
Числа x и y — корни уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$. $D = 49 - 48 = 1$; $t_1 = (7 + 1)/2 = 4$; $t_2 = (7 - 1)/2 = 3$.
Значит, пары $(4; 3)$ и $(3; 4)$.
Проверка. $(4; 3)$: $4 + 3 = 7$; $16 + 9 = 25$. Верно.
Вторая пара получается перестановкой, система симметрична.
Ответ: $(3; 4)$, $(4; 3)$.

Образец с дробью. Система $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$.

ОДЗ: $x \neq 0$, $y \neq 0$. Так как $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy}$,
получаем $\frac{5}{xy} = \frac{5}{6}$, то есть $xy = 6$. Вместе с $x + y = 5$: $t^2 - 5t + 6 = 0$, $t = 2$ или $t = 3$. Пары $(2; 3)$, $(3; 2)$. Числа не равны нулю, ОДЗ выполнено.
Ответ: $(2; 3)$, $(3; 2)$.

Где эксперт ищет баллы: 1) выбран и назван способ; 2) уравнения верно преобразованы (одно уравнение с одной переменной); 3) оно верно решено; 4) для каждого корня найдена вторая переменная; 5) в ответ записаны все пары и только они. Описка при верном ходе — 1 балл из 2. Точные критерии смотрите в актуальных материалах ФИПИ.

Чек-лист перед сдачей

- ☐ ОДЗ записано (если есть дробь).
- ☐ Назван способ.
- ☐ Найдены обе переменные.
- ☐ Пары в правильном порядке $(x; y)$.
- ☐ Ни одно решение не потеряно (знаки $\pm$, обе ветки).
- ☐ Совпавшие пары записаны один раз.
- ☐ Проверена подстановкой.
- ☐ Ответ записан парами.

Зачётный лист · системы уравнений (3 уровня)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____ Время: 40 минут. Уровень 3 оформляйте полностью, как на экзамене. Ответ — пары (x; y).

Уровень 1 · на «3» · 4 задания по 1 баллу

1.1. Решите систему:
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Ответ: _____

1.2. Решите систему:
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Ответ: _____

1.3. Решите систему:
$$\begin{cases} y = x - 3 \\ xy = 4 \end{cases}$$

Ответ: _____

1.4. Является ли пара (3; -1) решением системы
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$
 ? Ответ обоснуйте подстановкой.

Ответ: _____

Уровень 2 · на «4» · 4 задания по 1 баллу

2.1. Решите систему:
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Ответ: _____

2.2. Решите систему:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases}$$

Ответ: _____

2.3. Решите систему:
$$\begin{cases} (x - 3)(y + 1) = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Ответ: _____

2.4. Сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$?

Ответ: _____

Уровень 3 · на «5» · 4 задания по 2 балла (как №20)

3.1. Решите систему:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4} \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Ответ: _____

3.2. Решите систему:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 6 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Ответ: _____

3.3. Решите систему:
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Ответ: _____

3.4. Решите систему:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Ответ: _____

Ответы, ключевые точки и критерии (для учителя).

Уровень 1.

№	Ответ	Ключевые точки
1.1	(4; 2)	Сложение: $2x = 8$, $x = 4$, $y = 2$.
1.2	(3; 2)	Вычитание: $3y = 6$, $y = 2$; $x = y + 1 = 3$.
1.3	(4; 1), (-1; -4)	$x(x - 3) = 4$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x = 4$ или $x = -1$; $y = x - 3$ даёт 1 и -4.
1.4	да	Да: $2 \cdot 3 + (-1) = 5$ и $9 + 1 = 10$. Оба равенства верны.

Уровень 2.

№	Ответ	Ключевые точки
2.1	(3; 4), (4; 3)	$s = 7$, $25 = 49 - 2p$, $p = 12$; $t^2 - 7t + 12 = 0$; $t = 3, 4$.
2.2	(6; 4), (6; -4), (-6; 4), (-6; -4)	Сложение: $2x^2 = 72$, $x^2 = 36$; $y^2 = 16$. Четыре пары.
2.3	(3; 2), (6; -1)	$x = 3$; $y = 2$. $y = -1$: $x = 6$. Пары (3; 2) и (6; -1).
2.4	3	$x^2 = y + 4$. Тогда $y + 4 + y^2 = 16$, $y^2 + y - 12 = 0$, $y = 3$ или $y = -4$. При $y = 3$: $x^2 = 7$, два значения; при $y = -4$: $x = 0$. Всего 3 решения. Ответ: 3.

Уровень 3.

№	Ответ	Ключевые точки
3.1	(2; 4), (4; 2)	ОДЗ $x \neq 0$, $y \neq 0$. $(x + y)/(xy) = 3/4$, $6/(xy) = 3/4$, $xy = 8$; $t^2 - 6t + 8 = 0$; $t = 2, 4$.
3.2	(-1; -3), (-3; -1)	$s^2 - 6 + s = 6$, $s^2 + s - 12 = 0$, $s = 3$ или $s = -4$. При $s = 3$, $p = 3$: $D = 9 - 12 < 0$, решений нет. При $s = -4$, $p = 3$: $t^2 + 4t + 3 = 0$, $t = -1, -3$.
3.3	(8; 4), (9; 3)	$(x - 2y)(x - 3y) = 0$. $x = 2y$: $3y = 12$, $y = 4$, $x = 8$. $x = 3y$: $4y = 12$, $y = 3$, $x = 9$.
3.4	(6; 2), (2; 6)	ОДЗ $x \neq 0$, $y \neq 0$. $t = x/y$: $3t^2 - 10t + 3 = 0$, $t = 3$ или $1/3$. $x = 3y$: $4y = 8$, $y = 2$, $x = 6$. $x = y/3$: $(4/3)y = 8$, $y = 6$, $x = 2$.

Баллы. Максимум 16 (4 + 4 + 8). Уровень 3: 2 балла — верный ход, верные пары; 1 балл — верный ход, но описка или вычислительная ошибка; 0 — иначе.

Оценка (предложение, подстройте под ученика). «3» — на уровне 1 не меньше 3 баллов. «4» — уровень 1 не меньше 3 баллов и уровень 2 не меньше 3 баллов. «5» — уровни 1 и 2 не меньше 3 баллов каждый и уровень 3 не меньше 6 баллов. Если уровень 1 ниже 3 баллов: вернуться к правилам 1-3 в теории и повторить пятиминутку.

Домашняя карточка • системы уравнений (№20)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____

Оформите каждую задачу полностью, как на экзамене: ОДЗ (если есть дробь), способ, ход решения, проверка, ответ парами. Образец записи — в памятке.

1. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

Ответ: _____

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 32 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Ответ: _____

3. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Ответ: _____

4. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} (x + 1)(y - 2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Ответ: _____

Ответы и ключевые точки проверки (для учителя и родителей).

1) (3; 1), (-3; -1). (Дробь, замена $t = x/y$) Ключевые точки: Замена $t = x/y$. ОДЗ: $x \neq 0, y \neq 0$. $3t^2 - 10t + 3 = 0$, $D = 64$, $t = 3$ или $t = 1/3$. При $t = 3$: $x = 3y$, $8y^2 = 8$, $y = \pm 1$, пары (3; 1), (-3; -1). При $t = 1/3$: $x = y/3$, $y^2/9 - y^2 = 8$, $y^2 = -9$: решений нет.

2) (3; 4), (4; 3), (-2; -6), (-6; -2). (Симметричная: s и p) Ключевые точки: $s = x + y$, $p = xy = 12$. $s^2 - 24 + s = 32$, $s^2 + s - 56 = 0$, $s = 7$ или $s = -8$. При $s = 7$: $t^2 - 7t + 12 = 0$, $t = 3, 4$, пары (3; 4), (4; 3). При $s = -8$: $t^2 + 8t + 12 = 0$, $t = -2, -6$, пары (-2; -6), (-6; -2). Четыре решения.

3) (4; 4), (6; 2). (Однородное уравнение) Ключевые точки: Разложение $(x - y)(x - 3y) = 0$. Случай $x = y$: $2y = 8$, пара (4; 4). Случай $x = 3y$: $4y = 8$, $y = 2$, пара (6; 2).

4) (-1; 2), (-1; -2), (1; 2). (Произведение равно нулю) Ключевые точки: Две системы. $x = -1$: $y^2 = 4$, пары (-1; 2) и (-1; -2). $y = 2$: $x^2 = 1$, пары (1; 2) и (-1; 2). Пара (-1; 2) общая: записать один раз. Всего три решения.

Как проверять. Ответ без хода решения не засчитывается. Если ход верный, а ошибка в вычислении — 1 балл из 2. Задача 4: четыре пары вместо трёх — типичная ошибка: нужно заметить совпавшую пару. Задача 1: проверить, что записано ОДЗ и что вторая ветка отброшена как не дающая решений.

Системы уравнений (№20)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, №20 часть 2).

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи есть похожая для самостоятельного решения (ответы в конце файла).

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Задачи разбора: 0. Подстановка из линейного уравнения. 1. Дробь и замена $t = x/y$. 2. Сложение: только x^2 и y^2 . 3. Симметричная система (s и p). 4. Однородное уравнение. 5. Произведение равно нулю.

Задача 0. Подстановка из линейного уравнения

Условие. Решите систему уравнений: (1) $y = x - 2$; (2) $x^2 + y^2 = 20$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Систему из двух уравнений с двумя неизвестными. В первом уравнении y уже выражен через x , во втором стоят квадраты. Нужно найти все пары (x ; y).

Учитель: Что в такой задаче легко упустить?

Ученик: Что решение это пара, а не одно число. И что пар может быть две.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: С чем из программы это похоже и что мы там делали?

Ученик: Это способ подстановки. Когда одно уравнение выражает переменную через другую, подставляем это выражение в другое уравнение.

Учитель: Верно. Формулировка из учебника: чтобы решить систему способом подстановки, выражают из какого-либо уравнения одну переменную через другую и подставляют в другое уравнение; получают уравнение с одной переменной.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до того, как начнёшь считать.

Ученик: Выражаю одну переменную. Подставляю в другое уравнение. Решаю. Для каждого корня нахожу вторую переменную. Проверяю.

Учитель: Фиксируем:

1. Выразить одну переменную через другую (удобнее из линейного уравнения).
2. Подставить в другое уравнение.
3. Решить уравнение с одной переменной.
4. Для каждого корня найти вторую переменную.
5. Проверить и записать пары.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Что выражаем?

Ученик: Уже готово: $y = x - 2$.

Учитель: Шаг 2. Подставь во второе уравнение.

Ученик: $x^2 + (x - 2)^2 = 20$.

Учитель: Раскрой скобки. Откуда берётся каждое слагаемое?

Ученик: $(x - 2)^2$ это квадрат разности: $x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 4$, то есть $x^2 - 4x + 4$. Получаю $x^2 + x^2 - 4x + 4 = 20$.

Если ученик ответит: $(x - 2)^2 = x^2 - 4$.

Учитель: Проверь на числах: при $x = 5$ чему равно $(5 - 2)^2$ и чему равно $5^2 - 4$? Что пропущено в формуле квадрата разности?

Учитель: Приведи к стандартному виду.

Ученик: $2x^2 - 4x + 4 - 20 = 0$, то есть $2x^2 - 4x - 16 = 0$. Делю на 2: $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Учитель: Шаг 3. Решай.

Ученик: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$. $x = (2 \pm 6) / 2$: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$.

Учитель: Шаг 4. Как найдём y и откуда берём формулу?

Ученик: Из первого уравнения, $y = x - 2$. При $x = 4$ получаем $y = 2$. При $x = -2$ получаем $y = -4$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: Подставляю пары в оба уравнения. (4; 2): $16 + 4 = 20$ и $2 = 4 - 2$. Верно. (-2; -4): $4 + 16 = 20$ и $-4 = -2 - 2$. Верно.

Учитель: Как запишем ответ?

Ученик: Парами: (4; 2), (-2; -4).

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты в следующий раз узнаешь такую задачу?

Ученик: В системе есть линейное уравнение или переменную легко выразить. Тогда подстановка.

Для самостоятельного решения. Решите систему: $x - y = 4$, $x^2 + y^2 = 40$.

Задача 1. Дробь и замена $t = x/y$

Условие. Решите систему уравнений: (1) $x/y + y/x = 5/2$; (2) $x^2 - y^2 = 3$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Систему с дробью в первом уравнении. Во втором уравнении разность квадратов. Надо найти все пары (x ; y).

Учитель: Какие ограничения даёт условие?

Ученик: x и y стоят в знаменателях, значит $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Это ОДЗ.

Если ученик ответит: ОДЗ только $x \neq 0$.

Учитель: Где в первом уравнении ещё стоит деление и на что?

Учитель: Что заметишь в первом уравнении?

Ученик: Дробь x/y и y/x переворачивают друг друга. Если $x/y = t$, то $y/x = 1/t$.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как поступают, когда в уравнении есть взаимно обратные выражения?

Ученик: Вводят новую переменную t , получают уравнение $t + 1/t = \text{число}$ и решают его, умножив на t .

Учитель: Уточним. Умножать на t можно, потому что $t \neq 0$. Почему t не равно нулю?

Ученик: $t = x/y$, а $x \neq 0$ по ОДЗ. Значит $t \neq 0$.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги.

Ученик: Записать ОДЗ. Ввести t . Решить уравнение для t . Для каждого t выразить x через y , подставить во второе уравнение. Найти пары. Проверить по ОДЗ.

Учитель: Фиксируем:

1. Записать ОДЗ.

- Ввести $t = x/y$ и решить уравнение для t .
- Для каждого t выразить x через y и подставить во второе уравнение.
- Найти y , затем x .
- Проверить ОДЗ и записать пары.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 2. Запиши уравнение для t .

Ученик: $t + 1/t = 5/2$. Умножу на $2t$: $2t^2 + 2 = 5t$, то есть $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Учитель: Откуда $2t^2$ и откуда 2?

Ученик: Из $t \cdot 2t = 2t^2$ и из $(1/t) \cdot 2t = 2$. Правая часть: $(5/2) \cdot 2t = 5t$.

Учитель: Решай.

Ученик: $D = 25 - 16 = 9$. $t = (5 \pm 3) / 4$. Значит $t = 2$ или $t = 1/2$.

Учитель: Шаг 3. Первая ветка $t = 2$. Что это значит для x и y ?

Ученик: $x/y = 2$, то есть $x = 2y$. Подставляю во второе уравнение: $4y^2 - y^2 = 3$, $3y^2 = 3$, $y^2 = 1$. Значит $y = 1$ или $y = -1$.

Учитель: Найди x .

Ученик: $x = 2y$. При $y = 1$ будет $x = 2$. При $y = -1$ будет $x = -2$. Пары (2; 1) и (-2; -1).

Учитель: Вторая ветка $t = 1/2$.

Ученик: $x/y = 1/2$, значит $x = y/2$. Подставляю: $y^2/4 - y^2 = 3$, то есть $-3y^2/4 = 3$, $y^2 = -4$. Квадрат не может быть отрицательным: решений нет.

Если ученик ответит: $y^2 = 4$.

Учитель: Проверь знак: $-3y^2/4 = 3$. Что получится, если обе части разделить на $-3/4$? Может ли квадрат числа быть отрицательным?

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверка по ОДЗ и подстановкой.

Ученик: Ни x , ни y не равны нулю. (2; 1): $2/1 + 1/2 = 5/2$ и $4 - 1 = 3$. (-2; -1): $(-2)/(-1) + (-1)/(-2) = 2 + 1/2 = 5/2$ и $4 - 1 = 3$. Верно.

Учитель: Ответ?

Ученик: (2; 1), (-2; -1).

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такую задачу?

Ученик: В уравнении есть x/y и y/x одновременно. Тогда ОДЗ и замена $t = x/y$.

Для самостоятельного решения. Решите систему: $x/y + y/x = 17/4$, $x^2 - y^2 = 15$.

Задача 2. Сложение: только x^2 и y^2

Условие. Решите систему уравнений: (1) $2x^2 + 3y^2 = 30$; (2) $3x^2 - y^2 = 23$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Систему, где в обоих уравнениях только x^2 и y^2 . Нет x , y и xy . Нужны все пары.

Учитель: Что здесь опасно?

Ученик: Из $x^2 =$ число получится два значения x , из y^2 два значения y . Легко потерять отрицательные.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Какой способ подходит?

Ученик: Сложение. Уравнения умножаем так, чтобы коэффициенты при одной переменной стали противоположными, и складываем.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до того, как начнёшь считать.

Ученик: Выбираю переменную, которую убираю. Умножаю. Складываю. Нахожу x^2 , потом y^2 . Извлекаю корни с плюсом и минусом. Составляю пары.

Учитель: Фиксируем:

- Выбрать, какую переменную исключаем (здесь y^2).
- Умножить уравнения на числа и сложить.
- Найти x^2 , затем y^2 .
- Извлечь корни: каждый квадрат даёт два значения.
- Составить все пары и проверить.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что убираем и на что умножаем?

Ученик: Убираю y^2 . В первом уравнении $+3y^2$, во втором $-y^2$. Умножу второе на 3: $9x^2 - 3y^2 = 69$. Число 69 это $23 \cdot 3$.

Учитель: Сложи с первым.

Ученик: $2x^2 + 9x^2 = 11x^2$ и $3y^2 - 3y^2 = 0$. Справа $30 + 69 = 99$. Получаю $11x^2 = 99$, $x^2 = 9$.

Учитель: Что получим для x ?

Ученик: $x = 3$ или $x = -3$.

Учитель: Как найдём y^2 и откуда берём формулу?

Ученик: Из второго уравнения: $y^2 = 3x^2 - 23$. При $x^2 = 9$ получаем $27 - 23 = 4$. Значит $y = 2$ или $y = -2$.

Учитель: Сколько пар получится?

Ученик: В системе только квадраты, знаки x и y независимы. Всего четыре пары.

Если ученик ответит: (3; 2) — всё.

Учитель: Подставь $x = -3$ и $y = 2$ в оба уравнения. Подходит? Почему?

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверь решение подстановкой.

Ученик: (3; 2): $18 + 12 = 30$ и $27 - 4 = 23$. Остальные дают те же квадраты, значит тоже подходят.

Учитель: Ответ?

Ученик: (3; 2), (3; -2), (-3; 2), (-3; -2).

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу в следующий раз?

Ученик: Признак: в обоих уравнениях только квадраты переменных. Складываю, потом ставлю $\pm$.

Для самостоятельного решения. Решите систему: $2x^2 + y^2 = 34$, $x^2 - y^2 = -7$.

Задача 3. Симметричная система (s и p)

Условие. Решите систему уравнений: (1) $x^2 + y^2 + x + y = 12$; (2) $xy = 4$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: В первом уравнении x и y стоят одинаково: поменяем их местами, уравнение не изменится. Во втором xy . Нужны все пары.

Учитель: Что тут может сбить?

Ученик: Желание подставлять $y = 4/x$. Получится уравнение четвёртой степени.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Какое правило поможет?

Ученик: Если $x + y = s$ и $xy = p$, то x и y — корни уравнения $t^2 - st + p = 0$. А $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$.

Учитель: Откуда вторая формула?

Ученик: Из квадрата суммы: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Переносу $2xy$.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до того, как начнёшь считать.

Ученик: Обозначаю $s = x + y$, $p = xy$. Записываю первое уравнение через s и p . Нахожу s . Для каждого s решаю $t^2 - st + p = 0$. Записываю пары.

Учитель: Фиксируем:

1. Ввести $s = x + y$, $p = xy$.
2. Выразить уравнение через s и p и найти s .
3. Для каждого s решить $t^2 - st + p = 0$.
4. Записать пары (с учётом порядка) и проверить.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Чему равно p ?

Ученик: Из второго уравнения $p = 4$.

Учитель: Запиши первое уравнение через s .

Ученик: $x^2 + y^2 = s^2 - 2p = s^2 - 8$. Тогда $s^2 - 8 + s = 12$, то есть $s^2 + s - 20 = 0$.

Учитель: Реши.

Ученик: $D = 1 + 80 = 81$. $s = (-1 \pm 9) / 2$: $s = 4$ или $s = -5$.

Учитель: Что делаем при $s = 4$?

Ученик: $t^2 - 4t + 4 = 0$, это $(t - 2)^2 = 0$, $t = 2$. Значит $x = y = 2$. Пара (2; 2).

Если ученик ответит: две пары (2; 2) и (2; 2).

Учитель: Сколько различных корней у $t^2 - 4t + 4 = 0$? Сколько тогда различных пар?

Учитель: При $s = -5$.

Ученик: $t^2 + 5t + 4 = 0$, $D = 25 - 16 = 9$, $t = (-5 \pm 3) / 2$: $t = -1$ и $t = -4$. Пары (-1; -4) и (-4; -1).

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверь решение подстановкой.

Ученик: (2; 2): $4 + 4 + 2 + 2 = 12$ и $2 \cdot 2 = 4$. (-1; -4): $1 + 16 - 1 - 4 = 12$ и $(-1)(-4) = 4$. По симметрии (-4; -1) тоже верна.

Учитель: Ответ?

Ученик: (2; 2), (-1; -4), (-4; -1).

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу в следующий раз?

Ученик: Признак: x и y входят одинаково, есть xy или $x + y$. Ввожу s и p .

Для самостоятельного решения. Решите систему: $x^2 + y^2 + x + y = 18$, $xy = 12$.

Задача 4. Однородное уравнение

Условие. Решите систему уравнений: (1) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$; (2) $x + y = 6$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Первое уравнение: все члены второй степени (x^2 , xy , y^2), справа ноль. Второе линейное. Нужны пары.

Учитель: Что здесь опасно?

Ученик: Подставить $y = 6 - x$ в первое и получить громоздкое уравнение. Или делить на y^2 и потерять решение с $y = 0$.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Какое правило подойдёт?

Ученик: Квадратный трёхчлен равен нулю — раскладываем на множители. Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Фиксируем:

1. Разложить левую часть первого уравнения на множители.

2. Записать две системы (каждый множитель равен нулю, вместе с линейным уравнением).

3. Решить каждую подстановкой.

4. Проверить и записать пары.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Как разложить $x^2 - 3xy + 2y^2$?

Ученик: Ищу два числа с суммой -3 и произведением 2 при y : это -1 и -2 . Получаю $(x - y)(x - 2y)$.

Учитель: Проверь раскрытием.

Ученик: $x^2 - 2xy - xy + 2y^2 = x^2 - 3xy + 2y^2$. Верно.

Если ученик ответит: $(x + y)(x + 2y)$.

Учитель: Раскрой скобки. Какой знак получился у среднего члена и какой нужен?

Учитель: Первый случай.

Ученик: $x - y = 0$, то есть $x = y$. Подставляю в $x + y = 6$: $2y = 6$, $y = 3$, $x = 3$. Пара (3; 3).

Учитель: Второй случай.

Ученик: $x - 2y = 0$, то есть $x = 2y$. Тогда $3y = 6$, $y = 2$, $x = 4$. Пара (4; 2).

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверь решение подстановкой.

Ученик: (3; 3): $9 - 27 + 18 = 0$ и $3 + 3 = 6$. (4; 2): $16 - 24 + 8 = 0$ и $4 + 2 = 6$. Верно.

Учитель: Ответ?

Ученик: (3; 3), (4; 2).

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу в следующий раз?

Ученик: Признак: уравнение, где все члены второй степени и справа ноль. Раскладываю на множители.

Для самостоятельного решения. Решите систему: $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$, $x + y = 10$.

Задача 5. Произведение равно нулю

Условие. Решите систему уравнений: (1) $(x - 2)(y + 1) = 0$; (2) $x^2 + y^2 = 5$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: В первом уравнении произведение двух скобок равно нулю. Второе: сумма квадратов. Нужны пары.

Учитель: Что тут легко потерять?

Ученик: Одну из веток. И не заметить, что одна пара может получиться в обеих ветках.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что мы знаем о произведении, равном нулю?

Ученик: Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Значит, $x - 2 = 0$ или $y + 1 = 0$.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Фиксируем:

1. Разбить на две системы.
2. Решить каждую.
3. Объединить решения; одинаковые пары записать один раз.
4. Проверить.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Первая система.

Ученик: $x = 2$ и $x^2 + y^2 = 5$. Подставляю: $4 + y^2 = 5$, $y^2 = 1$, $y = 1$ или $y = -1$. Пары (2; 1) и (2; -1).

Учитель: Вторая система.

Ученик: $y = -1$ и $x^2 + y^2 = 5$. Подставляю: $x^2 + 1 = 5$, $x^2 = 4$, $x = 2$ или $x = -2$. Пары $(2; -1)$ и $(-2; -1)$.

Учитель: Сколько всего различных решений?

Ученик: Пара $(2; -1)$ встретилась в обеих системах. Различных три: $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; -1)$.

Если ученик ответит: четыре решения.

Учитель: Выпиши пары из обеих систем подряд. Есть ли одинаковые?

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверь решение подстановкой.

Ученик: $(2; 1)$: $0 \cdot 2 = 0$ и $4 + 1 = 5$. $(2; -1)$: $0 \cdot 0 = 0$ и $4 + 1 = 5$. $(-2; -1)$: $(-4) \cdot 0 = 0$ и $4 + 1 = 5$.

Учитель: Ответ?

Ученик: $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; -1)$.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу в следующий раз?

Ученик: Признак: уравнение вида $(...)(...) = 0$. Делю на две системы и объединяю решения.

Для самостоятельного решения. Решите систему: $(x - 3)(y + 2) = 0$, $x^2 + y^2 = 13$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

- $x - y = 4$, $x^2 + y^2 = 40$: $(6; 2)$, $(-2; -6)$.
- $x/y + y/x = 17/4$, $x^2 - y^2 = 15$: $(4; 1)$, $(-4; -1)$. Замена $t = x/y$ даёт $t = 4$ или $t = 1/4$; ветка $t = 1/4$ решений не имеет.
- $2x^2 + y^2 = 34$, $x^2 - y^2 = -7$: $(3; 4)$, $(3; -4)$, $(-3; 4)$, $(-3; -4)$.
- $x^2 + y^2 + x + y = 18$, $xy = 12$: $(-3; -4)$, $(-4; -3)$. Значение $s = 6$ даёт $D < 0$, решений нет.
- $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$, $x + y = 10$: $(5; 5)$, $(8; 2)$.
- $(x - 3)(y + 2) = 0$, $x^2 + y^2 = 13$: $(3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; -2)$.

План урока и домашнего задания · системы уравнений (№20)

Индивидуальное занятие, 60 минут, 9 класс, подготовка к ОГЭ. Для репетитора: на печать 1 страница.

Цель

К концу урока ученик выбирает способ решения системы по виду уравнений, называет алгоритм до счёта и записывает одну систему так, чтобы эксперт поставил 2 балла: ход, обе переменные, все пары, проверка.

Ход урока

Минуты	Что делаем	Материал
0-5	Устный опрос. Пять вопросов подряд без подготовки: 1, 5, 7, 9, 12. Ошибку не поправляем, записываем: вернёмся на 5-й минуте.	Теория и опрос, вопросы
5-12	Открытие. Просим решить систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = 3 \end{cases}$. Ученик, как правило, записывает одну пару (3; 4). Спрашиваем: чему равен y^2 и сколько у него значений? Получаем $y = \pm 4$: две пары. Фиксируем правило: квадрат даёт два значения, решение — пара.	Теория, правила 1 и 3; чистый лист
12-27	Разбор вслух двух задач по этапам диалога «Что мы видим — правило — алгоритм — решение — проверка»: задача 0 (подстановка) и задача 3 (симметричная система). Ученик сам называет алгоритм до счёта.	Диалог-разбор, задачи 0 и 3
27-35	Пятиминутка (вариант А), 7 минут без подсказок, затем сверка по ответам и разбор ошибок. Проверяем подстановкой.	Карточки-пятиминутки
35-50	Самостоятельная задача уровня №20: задача 2 или 5 в интерактивном тренажёре по шагам; затем та же задача записывается на листе как на экзамене.	Тренажёр по шагам; памятка
50-57	Учитель — эксперт. Проверяем запись по чек-листу памятки (5 мест, где ставится балл). Ученик находит, где потерял бы балл, и переписывает.	Памятка, образец записи
57-60	Итог и ДЗ. Вопрос: «По каким признакам ты выбираешь способ?» (линейное уравнение — подстановка; только x^2 и y^2 — сложение; $x + y$ и $xу$ — Виета; произведение равно нулю — две системы; дробь — ОДЗ и замена). Выдаём домашнюю карточку.	Домашняя карточка

Как подстроить под уровень

- **Трек А:** в блоке 12-27 разбираем задачи 0 и 3 целиком по диалогу; самостоятельно — задача 4 (однородное) или 5 по шагам; ДЗ — задачи 3 и 4 из карточки.
- **Трек В:** план как есть; задачу 3 ученик решает сразу сам, учитель только слушает.
- **Трек С:** вместо задач 0 и 3 берём 1 и 2; в блоке 35-50 — задача 1 без подсказок; вопрос «Можно ли решить быстрее, не вводя t ?» (подстановка $x = ty$ даёт то же самое).

Домашнее задание

1. Домашняя карточка из 4 задач (№20), оформить полностью. Срок — к следующему занятию.
2. Интерактивный тест «Системы уравнений» (10 вопросов). Цель — не меньше 8.
3. Тренажёр «новые числа каждый раз»: 10 задач, разные типы; записать, какие типы вызвали ошибки.

Следующее занятие

Первые 5 минут — три вопроса из опроса (3, 6, 10). Затем проверка ДЗ по ключевым точкам в конце карточки. Через неделю зачётный лист: уровень 1 обязателен, уровни 2 и 3 по треку. Если уровень 1 ниже 3 баллов из 4, возвращаемся к правилам 1-3 и к пятиминутке.