

Неравенства: теория и устный опрос

№13 (часть 1) и №20 (часть 2). Печать: 3 страницы А4. Определения и правила записаны близко к школьному учебнику (алгебра, 8–9 класс).

1. Решение неравенства

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. **Решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет. Неравенства, имеющие одни и те же решения, называют **равносильными**.

Пример. Число 3 — решение неравенства $2x - 1 > 4$: при $x = 3$ получаем $5 > 4$, это верно. Число 2 не решение: $3 > 4$ неверно.

2. Свойства неравенств

- Если к обеим частям неравенства прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, получится равносильное неравенство. Любое слагаемое можно перенести из одной части в другую, изменив его знак.
- Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же **положительное** число, получится равносильное неравенство.
- Если обе части умножить (или разделить) на одно и то же **отрицательное** число и **изменить знак неравенства на противоположный**, получится равносильное неравенство.

Пример. $-3x > 12$. Делим на -3 и меняем знак: $x < -4$.

3. Линейное неравенство

Неравенство $ax > b$ сводится к виду: при $a > 0$ получаем $x > b/a$; при $a < 0$ получаем $x < b/a$ (знак меняется). Если $a = 0$, неравенство $0 \cdot x > b$ верно при любом x (если $b < 0$) или не имеет решений (если $b \geq 0$).

Пример. $5x - 7 \leq 8x + 2$; $5x - 8x \leq 2 + 7$; $-3x \leq 9$; $x \geq -3$. Ответ: $[-3; +\infty)$.

4. Числовые промежутки

Запись	Неравенство	Название
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	отрезок
$(a; b)$	$a < x < b$	интервал
$[a; b)$ и $(a; b]$	$a \leq x < b$ и $a < x \leq b$	полуинтервалы
$[a; +\infty)$	$x \geq a$	луч
$(a; +\infty)$	$x > a$	открытый луч
$(-\infty; a]$	$x \leq a$	луч
$(-\infty; a)$	$x < a$	открытый луч

6. Квадратное неравенство

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0 , ≥ 0 , ≤ 0), где x — переменная, a, b, c — числа, $a \neq 0$, называется **квадратным неравенством**.

- Если $a < 0$, умножить обе части на -1 и сменить знак неравенства.
- Найти корни трёхчлена (дискриминант или теорема Виета).
- Схематично изобразить параболу (ветви вверх) и отметить корни.
- Выбрать промежутки: « > 0 » — где парабола выше оси, « < 0 » — где ниже.
- Записать ответ с нужными скобками.

При $a > 0$	$D > 0, x_1 < x_2$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	все x , кроме x_1	любое x
$ax^2 + bx + c < 0$	$(x_1; x_2)$	решений нет	решений нет
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	любое x	любое x
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$[x_1; x_2]$	только $x = x_1$	решений нет

Примеры. $x^2 < 9$: $(-3; 3)$. $x^2 > 9$: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Запись « $x > \pm 3$ » неверна.

7. Метод интервалов

Чтобы решить неравенство $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$ (< 0): 1) отметить на оси нули множителей; 2) определить знак на самом правом промежутке (при положительном старшем коэффициенте это «+»); 3) расставить знаки справа налево, меняя знак при переходе через корень **нечётной** кратности; через корень **чётной** кратности знак не меняется; 4) выбрать промежутки нужного знака.

Корень чётной кратности, например $(x - 1)^2$, при нестрогом знаке даёт в ответ отдельную точку, если рядом знак «минус».

8. Дробно-рациональные неравенства

Дробь P/Q положительна, если P и Q одного знака; отрицательна, если разных знаков; равна нулю, если $P = 0$, а $Q \neq 0$.

- Перенести всё в левую часть, привести к одной дроби.
- Разложить числитель и знаменатель на множители, отметить их нули.
- Нули знаменателя всегда выколоты**; нули числителя закрашены только при $\geq$ и $\leq$.

Знаки $-\infty$ и $+\infty$ всегда пишут с **круглой** скобкой. Квадратная скобка (закрашенная точка) — число входит в решение (знаки $\leq, \geq$). Круглая скобка (пустая точка) — не входит (знаки $<, >$).

5. Системы неравенств

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое неравенство системы. Чтобы решить систему, решают каждое неравенство, отмечают решения на одной числовой прямой и берут их **общую часть** (пересечение).

Пример. Система $x > 1, x \leq 4$: общая часть (1; 4]. Если общих точек нет, решений нет. Не путайте пересечение (система) с объединением (две ветки).

Вопросы для устного опроса (с ответами)

Ученику читают вопрос, ответ закрыт. Ответ «своими словами» засчитывается, если сохранён смысл правила. Для 5-минутного опроса: вопросы 4, 7, 9, 11, 14.

№	Вопрос	Ответ
1	Что называют решением неравенства с одной переменной?	Значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.
2	Что значит «решить неравенство»?	Найти все его решения или доказать, что решений нет.
3	Какие неравенства называют равносильными?	Те, у которых одни и те же решения.
4	Что происходит со знаком неравенства при делении обеих частей на отрицательное число?	Знак меняется на противоположный.
5	Решите $-3x > 12$ и объясните каждый шаг.	Делим на -3 , знак меняется: $x < -4$.
6	Когда в записи промежутка ставят квадратную скобку?	Когда число входит в решение: знаки $\leq, \geq$.
7	Какая скобка стоит рядом с бесконечностью?	Всегда круглая.
8	Что называют решением системы неравенств?	Значения переменной, при которых верно каждое неравенство; это общая часть (пересечение) решений.
9	Решите систему $x > 1, x \leq 4$.	(1; 4].
10	Что делать с квадратным неравенством, если $a < 0$?	Умножить на -1 и сменить знак (или рисовать ветви параболы вниз).
11	Решите $x^2 < 9$ и $x^2 > 9$.	$(-3; 3)$ и $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
12	Что можно сказать о $x^2 - 4x + 5 > 0$, если $D < 0$ и $a > 0$?	Трёхчлен положителен при любом x : решение — любое число.
13	Меняется ли знак при переходе через корень $(x - 1)^2$?	Нет: корень чётной кратности, знак не меняется.
14	Какие точки в дробном неравенстве выколоты всегда?	Нули знаменателя.
15	Почему нельзя умножить обе части неравенства $6/(x + 1) \geq x$ на $x + 1$?	Знак $x + 1$ неизвестен: при отрицательном $x + 1$ знак неравенства пришлось бы менять; можно потерять решения.

Типичные ошибки (на что смотреть)

- Решить методом интервалов.
- Нельзя** умножать обе части на выражение с неизвестным знаком и сокращать на выражение с переменной.

9. Где это в ОГЭ

№13 (часть 1): по неравенству выбрать верный промежуток или рисунок, в ответ записывается номер. №20 (часть 2): полное решение на бланке №2, в ответе записывается промежуток. Точные формулировки и критерии — по актуальным материалам ФИПИ.

1. Деление на отрицательное число без смены знака неравенства.
2. Для $x^2 > 9$ записали только $x > 3$ (потеряли $x < -3$).
3. Квадратная скобка у бесконечности или круглая у закрашенной точки.
4. Вместо пересечения решений системы записали объединение.
5. В дроби не выколота нулевая точка знаменателя.
6. Умножили обе части на выражение с x , не зная его знак.
7. Потеряли изолированную точку от корня чётной кратности $(x - 1)^2$ при знаке $\geq$ или $\leq$.
8. Не заметили, что $D < 0$: решили «до корней» там, где решений нет или подходит любое x .