

Разбор 5 задач повышенной сложности • №20

Неравенства: дробь с переносом, корень чётной кратности, система, трёхчлен без корней, кубическое неравенство. У каждой задачи: что видим, решение по шагам, ответ, проверка, типичная ловушка. Печать 3 страницы А4.

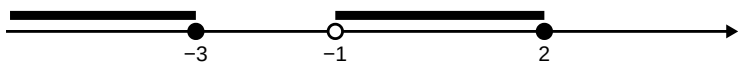
Задача 1. Дробь с переносом слагаемых

Условие. Решите неравенство: $\frac{6}{x+1} \geq x$. Запишите ответ промежутками.

Что видим. Дробно-рациональное неравенство: переменная стоит в знаменателе, справа число-выражение x . Это не «обычное» дробное неравенство вида $\text{дробь} \geq 0$, сначала нужно привести к такому виду.

Решение.

- Переносим x в левую часть и приводим к общему знаменателю: $\frac{6}{x+1} - x \geq 0$; $\frac{6 - x(x+1)}{x+1} \geq 0$;
 $\frac{-x^2 - x + 6}{x+1} \geq 0$.
- Умножаем обе части на -1 (знак меняется): $\frac{x^2 + x - 6}{x+1} \leq 0$.
- Корни числителя: $D = 1 + 24 = 25$, $x = (-1 \pm 5)/2$, то есть 2 и -3 . Значит, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ и неравенство имеет вид $\frac{(x-2)(x+3)}{x+1} \leq 0$.
- Отмечаем точки -3 и 2 (закрашены: знак $\leq$, нули числителя) и -1 (выколота: нуль знаменателя). Справа от 2 знак «+» (при $x = 3$ дробь равна $6/4 > 0$), далее знаки чередуются: на $(-1; 2)$ «-», на $(-3; -1)$ «+», на $(-\infty; -3)$ «-».
- Нужен знак «-» или ноль: $(-\infty; -3]$ и $(-1; 2]$.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup (-1; 2]$

Проверка. $x = 1$: $6/2 = 3 \geq 1$, верно. $x = -2$: $6/(-1) = -6 \geq -2$ — неверно, -2 не в ответе. $x = -4$: $6/(-3) = -2 \geq -4$, верно.

Ловушка. Умножение обеих частей на $x+1$ «как на положительное» даёт $x^2 + x - 6 \leq 0$, то есть $[-3; 2]$: ответ неверный (теряется луч $(-\infty; -3]$, а точка -1 попадает в ответ). Знак $x+1$ неизвестен.

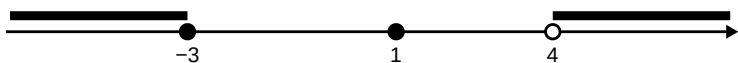
Задача 2. Корень чётной кратности и изолированная точка

Условие. Решите неравенство: $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-4} \geq 0$.

Что видим. Дробь, числитель уже разложен. Множитель $(x-1)^2$ стоит в чётной степени: в точке 1 знак не меняется, а сама дробь обращается в ноль.

Решение.

- Нули числителя: -3 и 1 . Нуль знаменателя: 4 (выколот).
- Знак справа от 4 : при $x = 5$ дробь равна $16 \cdot 8 / 1 > 0$, знак «+».
- Через 4 знак меняется: на $(1; 4)$ «-». Через 1 (чётная кратность) знак не меняется: на $(-3; 1)$ тоже «-». Через -3 знак меняется: на $(-\infty; -3)$ «+».
- Нужно ≥ 0 . Промежутки «+»: $(-\infty; -3]$ и $(4; +\infty)$. Точка -3 входит (числитель 0), точка 4 не входит.
- Отдельно проверяем $x = 1$: числитель равен 0 , дробь равна 0 , а $0 \geq 0$ верно. Значит, $x = 1$ входит в ответ как отдельная точка.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$

Проверка. $x = 1$: $0/(-3) = 0 \geq 0$, верно. $x = 0$: $(1 \cdot 3)/(-4) < 0$, неверно. $x = 5$: $16 \cdot 8/1 > 0$, верно.

Ловушка. Потерять точку $x = 1$ (рядом знак «-», и кажется, что она не нужна) или, наоборот, отметить в 1 смену знака.

Задача 3. Система: квадратное и линейное с дробями

Условие. Решите неравенство:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ \frac{3-x}{2} \leq \frac{x+1}{3} \end{cases}$$

Что видим. Система неравенств: ответ — общая часть решений. Первое неравенство квадратное, второе линейное с дробями.

Решение.

1. Первое: корни $x^2 - 3x - 10 = 0$: $D = 9 + 40 = 49$, $x = (3 \pm 7)/2$, то есть 5 и -2 . Ветви параболы вверх, нужно « < 0 » — между корнями: $(-2; 5)$.
2. Второе: умножаем обе части на 6 (положительное число, знак не меняется): $3(3 - x) \leq 2(x + 1)$; $9 - 3x \leq 2x + 2$; $7 \leq 5x$; $x \geq 7/5 = 1,4$. Получаем $[1,4; +\infty)$.
3. Общая часть множеств $(-2; 5)$ и $[1,4; +\infty)$: левый конец 1,4 входит, правый конец 5 не входит.



Ответ: $[1,4; 5)$

Проверка. $x = 1,4$: $1,96 - 4,2 - 10 < 0$ и $(3 - 1,4)/2 = 0,8 = (1,4 + 1)/3$, нестрогое неравенство верно. $x = 5$ даёт $25 - 15 - 10 = 0$, а нужно строго меньше нуля, поэтому 5 не входит.

Ловушка. Записать $[1,4; 5]$ (5 входит) или забыть перенести $7/5$ в ответ точно; ещё частая ошибка — взять объединение вместо пересечения.

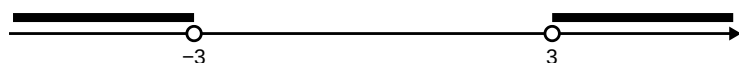
Задача 4. Числитель без корней и отрицательный знаменатель

Условие. Решите неравенство: $\frac{x^2 - 6x + 10}{9 - x^2} \leq 0$.

Что видим. Дробь, у числителя $D < 0$. Если трёхчлен не имеет корней, его знак постоянен, и решение упрощается.

Решение.

1. Числитель: $D = 36 - 40 = -4 < 0$, ветви вверх, значит $x^2 - 6x + 10 > 0$ при любом x . (Или выделить квадрат: $(x - 3)^2 + 1 > 0$.)
2. Дробь ≤ 0 при положительном числителе только если знаменатель отрицателен: $9 - x^2 < 0$. Знак строгий: знаменатель не может быть нулём, а дробь нулю не равна никогда.
3. $x^2 > 9$, то есть $x < -3$ или $x > 3$.



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Проверка. $x = 0$: $10/9 > 0$, неравенство ≤ 0 неверно. $x = 4$: $(16 - 24 + 10)/(9 - 16) = 2/(-7) < 0$, верно. $x = 3$: знаменатель 0, нельзя.

Ловушка. Поставить квадратные скобки (кажется, что корни знаменателя «входят»); решать $x^2 - 6x + 10 \leq 0$ (решений нет); не заметить, что в знаменателе $9 - x^2$, а не $x^2 - 9$, и потерять знак.

Задача 5. Кубическое неравенство: группировка

Условие. Решите неравенство: $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \geq 0$.

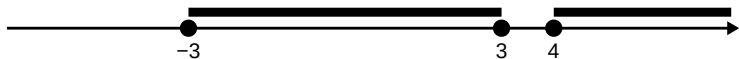
Что видим. Многочлен третьей степени. Подбирать корни долго: слагаемые попарно имеют общий множитель, поэтому раскладываем группировкой.

Решение.

1. $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = x^2(x - 4) - 9(x - 4) = (x - 4)(x^2 - 9) = (x - 4)(x - 3)(x + 3)$.

2. Нули: $-3, 3, 4$. Справа от 4 знак «+» (старший коэффициент положительный). Знаки чередуются справа налево: на $(3; 4)$ «-», на $(-3; 3)$ «+», на $(-\infty; -3)$ «-».

3. Нужно ≥ 0 , корни входят: $[-3; 3]$ и $[4; +\infty)$.



Ответ: $[-3; 3] \cup [4; +\infty)$

Проверка. $x = 0$: $36 \geq 0$, верно. $x = 3,5$: $42,875 - 49 - 31,5 + 36 = -1,625 < 0$, неверно. $x = 5$: $125 - 100 - 45 + 36 = 16 > 0$, верно.

Ловушка. Потерять отрезок $[-3; 3]$ или перепутать порядок знаков; искать корни подбором и не найти третий; не записать, что корни входят.