

Неравенства: теория и устный опрос

№13 (часть 1) и №20 (часть 2). Печать: 3 страницы А4. Определения и правила записаны близко к школьному учебнику (алгебра, 8–9 класс).

1. Решение неравенства

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство. **Решить неравенство** — значит найти все его решения или доказать, что решений нет. Неравенства, имеющие одни и те же решения, называют **равносильными**.

Пример. Число 3 — решение неравенства $2x - 1 > 4$: при $x = 3$ получаем $5 > 4$, это верно. Число 2 не решение: $3 > 4$ неверно.

2. Свойства неравенств

- Если к обеим частям неравенства прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, получится равносильное неравенство. Любое слагаемое можно перенести из одной части в другую, изменив его знак.
- Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же **положительное** число, получится равносильное неравенство.
- Если обе части умножить (или разделить) на одно и то же **отрицательное** число и **изменить знак неравенства на противоположный**, получится равносильное неравенство.

Пример. $-3x > 12$. Делим на -3 и меняем знак: $x < -4$.

3. Линейное неравенство

Неравенство $ax > b$ сводится к виду: при $a > 0$ получаем $x > b/a$; при $a < 0$ получаем $x < b/a$ (знак меняется). Если $a = 0$, неравенство $0 \cdot x > b$ верно при любом x (если $b < 0$) или не имеет решений (если $b \geq 0$).

Пример. $5x - 7 \leq 8x + 2$; $5x - 8x \leq 2 + 7$; $-3x \leq 9$; $x \geq -3$. Ответ: $[-3; +\infty)$.

4. Числовые промежутки

Запись	Неравенство	Название
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	отрезок
$(a; b)$	$a < x < b$	интервал
$[a; b)$ и $(a; b]$	$a \leq x < b$ и $a < x \leq b$	полуинтервалы
$[a; +\infty)$	$x \geq a$	луч
$(a; +\infty)$	$x > a$	открытый луч
$(-\infty; a]$	$x \leq a$	луч
$(-\infty; a)$	$x < a$	открытый луч

6. Квадратное неравенство

Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0 , ≥ 0 , ≤ 0), где x — переменная, a, b, c — числа, $a \neq 0$, называется **квадратным неравенством**.

- Если $a < 0$, умножить обе части на -1 и сменить знак неравенства.
- Найти корни трёхчлена (дискриминант или теорема Виета).
- Схематично изобразить параболу (ветви вверх) и отметить корни.
- Выбрать промежутки: « > 0 » — где парабола выше оси, « < 0 » — где ниже.
- Записать ответ с нужными скобками.

При $a > 0$	$D > 0, x_1 < x_2$	$D = 0$	$D < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	все x , кроме x_1	любое x
$ax^2 + bx + c < 0$	$(x_1; x_2)$	решений нет	решений нет
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	любое x	любое x
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$[x_1; x_2]$	только $x = x_1$	решений нет

Примеры. $x^2 < 9$: $(-3; 3)$. $x^2 > 9$: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Запись « $x > \pm 3$ » неверна.

7. Метод интервалов

Чтобы решить неравенство $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$ (< 0): 1) отметить на оси нули множителей; 2) определить знак на самом правом промежутке (при положительном старшем коэффициенте это «+»); 3) расставить знаки справа налево, меняя знак при переходе через корень **нечётной** кратности; через корень **чётной** кратности знак не меняется; 4) выбрать промежутки нужного знака.

Корень чётной кратности, например $(x - 1)^2$, при нестрогом знаке даёт в ответ отдельную точку, если рядом знак «минус».

8. Дробно-рациональные неравенства

Дробь P/Q положительна, если P и Q одного знака; отрицательна, если разных знаков; равна нулю, если $P = 0$, а $Q \neq 0$.

- Перенести всё в левую часть, привести к одной дроби.
- Разложить числитель и знаменатель на множители, отметить их нули.
- Нули знаменателя всегда выколоты**; нули числителя закрашены только при $\geq$ и $\leq$.

Знаки $-\infty$ и $+\infty$ всегда пишут с **круглой** скобкой. Квадратная скобка (закрашенная точка) — число входит в решение (знаки $\leq, \geq$). Круглая скобка (пустая точка) — не входит (знаки $<, >$).

5. Системы неравенств

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое неравенство системы. Чтобы решить систему, решают каждое неравенство, отмечают решения на одной числовой прямой и берут их **общую часть** (пересечение).

Пример. Система $x > 1, x \leq 4$: общая часть (1; 4]. Если общих точек нет, решений нет. Не путайте пересечение (система) с объединением (две ветки).

4. Решить методом интервалов.

Нельзя умножать обе части на выражение с неизвестным знаком и сокращать на выражение с переменной.

9. Где это в ОГЭ

№13 (часть 1): по неравенству выбрать верный промежуток или рисунок, в ответ записывается номер. №20 (часть 2): полное решение на бланке №2, в ответе записывается промежуток. Точные формулировки и критерии — по актуальным материалам ФИПИ.

Вопросы для устного опроса (с ответами)

Ученику читают вопрос, ответ закрыт. Ответ «своими словами» засчитывается, если сохранён смысл правила. Для 5-минутного опроса: вопросы 4, 7, 9, 11, 14.

№	Вопрос	Ответ
1	Что называют решением неравенства с одной переменной?	Значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.
2	Что значит «решить неравенство»?	Найти все его решения или доказать, что решений нет.
3	Какие неравенства называют равносильными?	Те, у которых одни и те же решения.
4	Что происходит со знаком неравенства при делении обеих частей на отрицательное число?	Знак меняется на противоположный.
5	Решите $-3x > 12$ и объясните каждый шаг.	Делим на -3 , знак меняется: $x < -4$.
6	Когда в записи промежутка ставят квадратную скобку?	Когда число входит в решение: знаки $\leq, \geq$.
7	Какая скобка стоит рядом с бесконечностью?	Всегда круглая.
8	Что называют решением системы неравенств?	Значения переменной, при которых верно каждое неравенство; это общая часть (пересечение) решений.
9	Решите систему $x > 1, x \leq 4$.	(1; 4].
10	Что делать с квадратным неравенством, если $a < 0$?	Умножить на -1 и сменить знак (или рисовать ветви параболы вниз).
11	Решите $x^2 < 9$ и $x^2 > 9$.	$(-3; 3)$ и $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
12	Что можно сказать о $x^2 - 4x + 5 > 0$, если $D < 0$ и $a > 0$?	Трёхчлен положителен при любом x : решение — любое число.
13	Меняется ли знак при переходе через корень $(x - 1)^2$?	Нет: корень чётной кратности, знак не меняется.
14	Какие точки в дробном неравенстве выколоты всегда?	Нули знаменателя.
15	Почему нельзя умножить обе части неравенства $6/(x + 1) \geq x$ на $x + 1$?	Знак $x + 1$ неизвестен: при отрицательном $x + 1$ знак неравенства пришлось бы менять; можно потерять решения.

Типичные ошибки (на что смотреть)

1. Деление на отрицательное число без смены знака неравенства.
2. Для $x^2 > 9$ записали только $x > 3$ (потеряли $x < -3$).
3. Квадратная скобка у бесконечности или круглая у закрашенной точки.
4. Вместо пересечения решений системы записали объединение.
5. В дроби не выколота нулевая точка знаменателя.
6. Умножили обе части на выражение с x , не зная его знак.
7. Потеряли изолированную точку от корня чётной кратности $(x - 1)^2$ при знаке $\geq$ или $\leq$.
8. Не заметили, что $D < 0$: решили «до корней» там, где решений нет или подходит любое x .

Два варианта на одном листе А4: вырезать по пунктирной линии. 5 заданий по 1 баллу; засчитывается верный промежуток с правильными скобками. «5» — 5 баллов, «4» — 4 балла, «3» — 3 балла.

Фамилия: _____ Время: 7 минут.
 Ответ запишите промежуток.

[illegible][illegible][illegible][illegible][illegible]

Фамилия: _____ Время: 7 минут.
 Ответ запишите промежутком.

[illegible][illegible][illegible][illegible]

№	Ответ	Ключ
1	$[-3; +\infty)$	$5x - 7 \leq 8x + 2; -3x \leq 9; x \geq -3.$
2	$(2; 5]$	$x > 2$ и $x \leq 5$; общая часть $(2; 5]$.
3	$(-2; 7)$	Корни 7 и -2 ; между корнями.
4	$(-\infty; -4) \cup [3; +\infty)$	Нули: 3 (входит), -4 (выколот).
5	$(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$	Два луча: $x \leq -4$ или $x \geq 4$.

№	Ответ	Ключ
1	$(-\infty; 2]$	$3 + 11 \geq 5x + 2x$; $14 \geq 7x$; $x \leq 2$.
2	$(-3; 3]$	$x \leq 3$ и $x > -3$; общая часть $(-3; 3]$.
3	$(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$	Корни -5 и 2 ; вне корней.
4	$[-2; 5)$	Нули: -2 (входит), 5 (выколот).
5	$(-5; 5)$	Между -5 и 5 , строго.

Типичные ошибки: не сменили знак при делении на отрицательное; потеряли второй луч в №5 (А) и №3 (Б); квадратная скобка у выколотой точки в дроби.

Разбор 5 задач повышенной сложности • №20

Неравенства: дробь с переносом, корень чётной кратности, система, трёхчлен без корней, кубическое неравенство. У каждой задачи: что видим, решение по шагам, ответ, проверка, типичная ловушка. Печать 3 страницы А4.

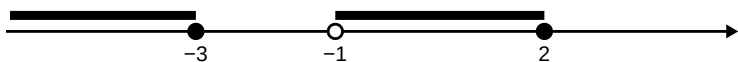
Задача 1. Дробь с переносом слагаемых

Условие. Решите неравенство: $\frac{6}{x+1} \geq x$. Запишите ответ промежутками.

Что видим. Дробно-рациональное неравенство: переменная стоит в знаменателе, справа число-выражение x . Это не «обычное» дробное неравенство вида $\text{дробь} \geq 0$, сначала нужно привести к такому виду.

Решение.

- Переносим x в левую часть и приводим к общему знаменателю: $\frac{6}{x+1} - x \geq 0$; $\frac{6 - x(x+1)}{x+1} \geq 0$;
 $\frac{-x^2 - x + 6}{x+1} \geq 0$.
- Умножаем обе части на -1 (знак меняется): $\frac{x^2 + x - 6}{x+1} \leq 0$.
- Корни числителя: $D = 1 + 24 = 25$, $x = (-1 \pm 5)/2$, то есть 2 и -3 . Значит, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$ и неравенство имеет вид $\frac{(x-2)(x+3)}{x+1} \leq 0$.
- Отмечаем точки -3 и 2 (закрашены: знак $\leq$, нули числителя) и -1 (выколота: нуль знаменателя). Справа от 2 знак «+» (при $x = 3$ дробь равна $6/4 > 0$), далее знаки чередуются: на $(-1; 2)$ «-», на $(-3; -1)$ «+», на $(-\infty; -3)$ «-».
- Нужен знак «-» или ноль: $(-\infty; -3]$ и $(-1; 2]$.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup (-1; 2]$

Проверка. $x = 1$: $6/2 = 3 \geq 1$, верно. $x = -2$: $6/(-1) = -6 \geq -2$ — неверно, -2 не в ответе. $x = -4$: $6/(-3) = -2 \geq -4$, верно.

Ловушка. Умножение обеих частей на $x+1$ «как на положительное» даёт $x^2 + x - 6 \leq 0$, то есть $[-3; 2]$: ответ неверный (теряется луч $(-\infty; -3]$, а точка -1 попадает в ответ). Знак $x+1$ неизвестен.

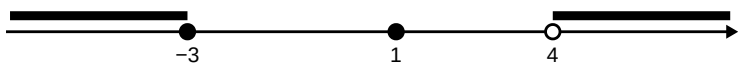
Задача 2. Корень чётной кратности и изолированная точка

Условие. Решите неравенство: $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-4} \geq 0$.

Что видим. Дробь, числитель уже разложен. Множитель $(x-1)^2$ стоит в чётной степени: в точке 1 знак не меняется, а сама дробь обращается в ноль.

Решение.

- Нули числителя: -3 и 1 . Нуль знаменателя: 4 (выколот).
- Знак справа от 4 : при $x = 5$ дробь равна $16 \cdot 8 / 1 > 0$, знак «+».
- Через 4 знак меняется: на $(1; 4)$ «-». Через 1 (чётная кратность) знак не меняется: на $(-3; 1)$ тоже «-». Через -3 знак меняется: на $(-\infty; -3)$ «+».
- Нужно ≥ 0 . Промежутки «+»: $(-\infty; -3]$ и $(4; +\infty)$. Точка -3 входит (числитель 0), точка 4 не входит.
- Отдельно проверяем $x = 1$: числитель равен 0 , дробь равна 0 , а $0 \geq 0$ верно. Значит, $x = 1$ входит в ответ как отдельная точка.



Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$

Проверка. $x = 1$: $0/(-3) = 0 \geq 0$, верно. $x = 0$: $(1 \cdot 3)/(-4) < 0$, неверно. $x = 5$: $16 \cdot 8/1 > 0$, верно.

Ловушка. Потерять точку $x = 1$ (рядом знак «-», и кажется, что она не нужна) или, наоборот, отметить в 1 смену знака.

Задача 3. Система: квадратное и линейное с дробями

Условие. Решите неравенство:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ \frac{3-x}{2} \leq \frac{x+1}{3} \end{cases}$$

Что видим. Система неравенств: ответ — общая часть решений. Первое неравенство квадратное, второе линейное с дробями.

Решение.

1. Первое: корни $x^2 - 3x - 10 = 0$: $D = 9 + 40 = 49$, $x = (3 \pm 7)/2$, то есть 5 и -2. Ветви параболы вверх, нужно « < 0 » — между корнями: $(-2; 5)$.
2. Второе: умножаем обе части на 6 (положительное число, знак не меняется): $3(3 - x) \leq 2(x + 1)$; $9 - 3x \leq 2x + 2$; $7 \leq 5x$; $x \geq 7/5 = 1,4$. Получаем $[1,4; +\infty)$.
3. Общая часть множеств $(-2; 5)$ и $[1,4; +\infty)$: левый конец 1,4 входит, правый конец 5 не входит.



Ответ: $[1,4; 5)$

Проверка. $x = 1,4$: $1,96 - 4,2 - 10 < 0$ и $(3 - 1,4)/2 = 0,8 = (1,4 + 1)/3$, нестрогое неравенство верно. $x = 5$ даёт $25 - 15 - 10 = 0$, а нужно строго меньше нуля, поэтому 5 не входит.

Ловушка. Записать $[1,4; 5]$ (5 входит) или забыть перенести $7/5$ в ответ точно; ещё частая ошибка — взять объединение вместо пересечения.

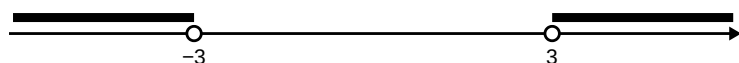
Задача 4. Числитель без корней и отрицательный знаменатель

Условие. Решите неравенство: $\frac{x^2 - 6x + 10}{9 - x^2} \leq 0$.

Что видим. Дробь, у числителя $D < 0$. Если трёхчлен не имеет корней, его знак постоянен, и решение упрощается.

Решение.

1. Числитель: $D = 36 - 40 = -4 < 0$, ветви вверх, значит $x^2 - 6x + 10 > 0$ при любом x . (Или выделить квадрат: $(x - 3)^2 + 1 > 0$.)
2. Дробь ≤ 0 при положительном числителе только если знаменатель отрицателен: $9 - x^2 < 0$. Знак строгий: знаменатель не может быть нулём, а дробь нулю не равна никогда.
3. $x^2 > 9$, то есть $x < -3$ или $x > 3$.



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

Проверка. $x = 0$: $10/9 > 0$, неравенство ≤ 0 неверно. $x = 4$: $(16 - 24 + 10)/(9 - 16) = 2/(-7) < 0$, верно. $x = 3$: знаменатель 0, нельзя.

Ловушка. Поставить квадратные скобки (кажется, что корни знаменателя «входят»); решать $x^2 - 6x + 10 \leq 0$ (решений нет); не заметить, что в знаменателе $9 - x^2$, а не $x^2 - 9$, и потерять знак.

Задача 5. Кубическое неравенство: группировка

Условие. Решите неравенство: $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \geq 0$.

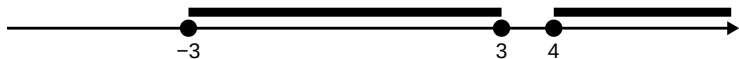
Что видим. Многочлен третьей степени. Подбирать корни долго: слагаемые попарно имеют общий множитель, поэтому раскладываем группировкой.

Решение.

1. $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = x^2(x - 4) - 9(x - 4) = (x - 4)(x^2 - 9) = (x - 4)(x - 3)(x + 3)$.

2. Нули: $-3, 3, 4$. Справа от 4 знак «+» (старший коэффициент положительный). Знаки чередуются справа налево: на $(3; 4)$ «-», на $(-3; 3)$ «+», на $(-\infty; -3)$ «-».

3. Нужно ≥ 0 , корни входят: $[-3; 3]$ и $[4; +\infty)$.



Ответ: $[-3; 3] \cup [4; +\infty)$

Проверка. $x = 0$: $36 \geq 0$, верно. $x = 3,5$: $42,875 - 49 - 31,5 + 36 = -1,625 < 0$, неверно. $x = 5$: $125 - 100 - 45 + 36 = 16 > 0$, верно.

Ловушка. Потерять отрезок $[-3; 3]$ или перепутать порядок знаков; искать корни подбором и не найти третий; не записать, что корни входят.

Памятка: алгоритм и оформление, неравенства (№20)

№20 оформляют полностью на бланке №2 (2 балла). В ответе — промежуток (или объединение промежутков). Ход решения должен быть виден эксперту.

Алгоритм решения неравенства

1. **Посмотри на вид.** Линейное, квадратное, дробь, произведение, многочлен выше второй степени, система?
2. **Приведи к виду «выражение ν 0».** Всё перенеси влево (слагаемые меняют знак). Если в знаменателе переменная, приведи к одной дроби. На выражение с неизвестным знаком не умножай.
3. **Если старший коэффициент отрицательный,** умножь обе части на -1 и смени знак неравенства.
4. **Разложи на множители** (корни по D или Виета, группировка, вынесение за скобку).
5. **Отметь нули** на оси: нули знаменателя всегда выколоты; нули числителя закрашены при $\geq$, $\leq$ и выколоты при $>$, $<$.
6. **Расставь знаки** справа налево. Через корень чётной кратности знак не меняется.
7. **Выбери промежутки** нужного знака, отдельно проверь изолированные точки.
8. **Проверь** подстановкой одного числа из ответа и одного не из ответа. Запиши ответ промежутками.

Какой способ выбрать

Что вижу	Что делаю
$ax + b \nu cx + d$	Перенос, деление; при делении на отрицательное знак меняется.
Система неравенств	Решить каждое, взять общую часть (пересечение).
$ax^2 + bx + c \nu 0$	Корни, парабола, знаки; проверь $D < 0$.
Дробь с x в знаменателе	Всё влево, одна дробь, метод интервалов; нули знаменателя выколоты.
Множитель $(x - a)^2$	Знак в a не меняется; при $\geq$, $\leq$ проверь точку a отдельно.
$x^3 + \dots$ (4 слагаемых)	Группировка, затем метод интервалов.

Формулы. Корни $ax^2 + bx + c = 0$: $x = (-b \pm \sqrt{D})/(2a)$, $D = b^2 - 4ac$. По теореме Виета для $x^2 + px + q$: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$. Разложение: $a(x - x_1)(x - x_2)$. Если $D < 0$ и $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при любом x .

Что снимает баллы

- Не изменён знак при умножении или делении на отрицательное число.
- Умножение на выражение с переменной без учёта знака (особенно в дробях).

Образец записи (№20)

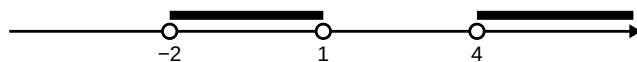
Задача. Решите неравенство $\frac{x^2 - 2x - 8}{x - 1} > 0$.

Решение. Разложим числитель на множители: $x^2 - 2x - 8 = 0$, по теореме Виета $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, значит $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$.

Получаем $\frac{(x - 4)(x + 2)}{x - 1} > 0$. Решим методом

интервалов. Нули числителя: -2 и 4 , нуль знаменателя: 1 . Неравенство строгое, поэтому все точки выколоты.

При $x = 5$ дробь равна $9 \cdot 7 / 4 > 0$, знак «+». Справа налево знаки чередуются: на $(1; 4)$ «-», на $(-2; 1)$ «+», на $(-\infty; -2)$ «-».



Нужен знак «+»: $(-2; 1)$ и $(4; +\infty)$.

Проверка. $x = 0$: $(0 - 0 - 8)/(0 - 1) = 8 > 0$, верно, 0 лежит в $(-2; 1)$. $x = 2$: $(4 - 4 - 8)/(2 - 1) = -8 < 0$, неверно, число 2 в ответ не входит.

Ответ: $(-2; 1) \cup (4; +\infty)$.

Образец для системы. $\begin{cases} 3x - 1 > 5 \\ x^2 - 9 \leq 0 \end{cases}$ Первое:

$3x > 6$, $x > 2$, то есть $(2; +\infty)$. Второе: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3) \leq 0$, корни -3 и 3 , ветви вверх, значит $[-3; 3]$. Общая часть: $(2; 3]$. Число 3 входит (второе неравенство нестрогое), число 2 не входит. **Ответ:** $(2; 3]$.

Где эксперт ищет баллы: 1) неравенство верно преобразовано к виду «выражение ν 0»; 2) многочлены разложены на множители; 3) нули отмечены, знаки определены (метод интервалов); 4) выбраны нужные промежутки, учтены скобки и изолированные точки; 5) записан верный ответ. Описка при верном ходе — 1 балл из 2. Точные критерии смотрите в актуальных материалах ФИПИ.

Чек-лист перед сдачей

- ☐ Всё в одной части, знак при -1 изменён.
- ☐ Дробь приведена к одной дроби.
- ☐ Множители выписаны.
- ☐ Нули знаменателя выколоты.
- ☐ Знаки расставлены справа налево.
- ☐ Корень чётной кратности учтён.
- ☐ Изолированная точка проверена.
- ☐ Скобки у концов верные.
- ☐ Проверена подстановкой.
- ☐ Ответ записан промежутками.

- Нули знаменателя не выколоты; квадратные скобки у выколотых точек.
- Потеряны изолированная точка или один из промежутков; вместо пересечения записано объединение.
- Только ответ без хода решения: 0 баллов.
- Верный ход, но описка или вычислительная ошибка: 1 балл из 2.

Зачётный лист · неравенства (3 уровня)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____ Время: 40 минут. Уровень 3 оформляйте полностью, как на экзамене. Ответ записывайте промежутком.

Уровень 1 · на «3» · 4 задания по 1 баллу

1.1. Решите неравенство: $4x - 9 > x + 6$.

Ответ: _____

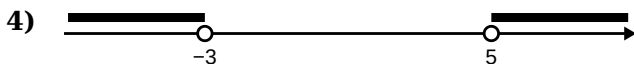
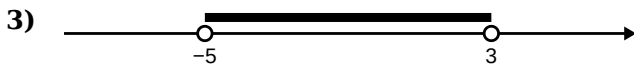
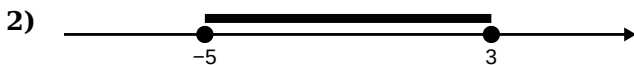
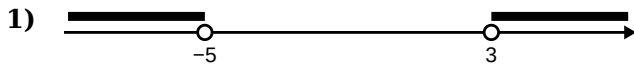
1.2. Решите неравенство: $7 - 2x < 1$.

Ответ: _____

1.3. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} x + 3 > 1 \\ 2x - 5 \leq 7 \end{cases}$$

Ответ: _____

1.4. Укажите решение неравенства $x^2 + 2x - 15 < 0$ (как в №13). В ответ запишите номер рисунка.



Ответ: _____

Уровень 2 · на «4» · 4 задания по 1 баллу

2.1. Решите неравенство: $x^2 - 4x - 12 \leq 0$.

Ответ: _____

2.2. Решите неравенство: $2x^2 + 5x - 3 > 0$.

Ответ: _____

2.3. Решите неравенство: $\frac{2x - 6}{x + 1} \leq 0$.

Ответ: _____

2.4. Решите неравенство: $x^2 - 4x + 7 > 0$.

ОТВЕТ: _____

Уровень 3 · на «5» · 4 задания по 2 балла (как №20)

3.1. Решите неравенство: $\frac{x^2 - x - 12}{x - 2} \geq 0$.

Ответ: _____

3.2. Решите неравенство: $\frac{12}{x-1} \geq x$.

Ответ:

3.3. Решите неравенство: $\frac{(x+2)^2(x-1)}{x-3} \leq 0$.

Ответ:

3.4. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 8 > 0 \\ \frac{5 - x}{3} \geq \frac{x - 1}{2} \end{cases}$$

Ответ: _____

Ответы, ключевые точки и критерии (для учителя).**Уровень 1.**

№	Ответ	Ключевые точки
1.1	$(5; +\infty)$	$3x > 15, x > 5$.
1.2	$(3; +\infty)$	$-2x < -6$; делим на -2 , знак меняется: $x > 3$.
1.3	$(-2; 6]$	$x > -2$ и $x \leq 6$; общая часть $(-2; 6]$.
1.4	3	Корни -5 и 3 ($D = 4 + 60 = 64$), ветви вверх, « < 0 » — между корнями, концы не входят: рисунок 3. Рисунок 1 — « > 0 », рисунок 2 — со скобками $[]$, рисунок 4 — неверные корни.

Уровень 2.

№	Ответ	Ключевые точки
2.1	$[-2; 6]$	Корни 6 и -2 , ветви вверх, « ≤ 0 » — между корнями, концы входят.
2.2	$(-\infty; -3) \cup (0,5; +\infty)$	$D = 25 + 24 = 49$; $x = (-5 \pm 7)/4$; $0,5$ и -3 . Вне корней.
2.3	$(-1; 3]$	Нули: 3 (числитель, входит) и -1 (знаменатель, выколот). Знак « $-$ » между ними.
2.4	$(-\infty; +\infty)$	$D = 16 - 28 < 0$, ветви вверх: трёхчлен положителен при любом x . Ответ: любое число, $(-\infty; +\infty)$.

Уровень 3.

№	Ответ	Ключевые точки
3.1	$[-3; 2) \cup [4; +\infty)$	$(x - 4)(x + 3)/(x - 2) \geq 0$. Нули $-3, 4$ (входят), 2 (выколот). Справа « $+$ », затем « $-$ » на $(2; 4)$, « $+$ » на $(-3; 2)$, « $-$ » левее -3 .
3.2	$(-\infty; -3] \cup (1; 4]$	Всё влево: $(12 - x(x - 1))/(x - 1) \geq 0$; $(x^2 - x - 12)/(x - 1) \leq 0$; $(x - 4)(x + 3)/(x - 1) \leq 0$. Нули $-3, 4$ (входят), 1 (выколот). Знак « $-$ » на $(1; 4)$ и левее -3 .
3.3	$\{-2\} \cup [1; 3)$	Нули: -2 (чётная кратность), $1, 3$ (выколот). Знаки: « $+$ » при $x > 3$, « $-$ » на $(1; 3)$, « $+$ » на $(-2; 1)$ и левее -2 . Нужно ≤ 0 : $[1; 3)$ и отдельная точка -2 (в ней дробь равна 0).
3.4	$(-\infty; -2)$	Первое: $(x - 4)(x + 2) > 0$: $(-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$. Второе: $2(5 - x) \geq 3(x - 1)$; $13 \geq 5x$; $x \leq 2,6$. Общая часть: $(-\infty; -2)$; луч $(4; +\infty)$ не пересекается с $x \leq 2,6$.

Баллы. Максимум 16 ($4 + 4 + 8$). Уровень 3: 2 балла — верный ход и верный ответ; 1 балл — верный ход, но описка или вычислительная ошибка; 0 — иначе. Задание считается верным только при правильных скобках и всех промежутках.

Оценка (предложение, подстройте под ученика). «3» — на уровне 1 не меньше 3 баллов. «4» — уровень 1 не меньше 3 баллов и уровень 2 не меньше 3 баллов. «5» — уровни 1 и 2 не меньше 3 баллов каждый и уровень 3 не меньше 6 баллов. Если уровень 1 ниже 3 баллов: вернуться к правилам 1–5 в теории и повторить пятиминутку.

Домашняя карточка · неравенства (№20)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____

Оформите каждую задачу полностью, как на экзамене: преобразования, разложение на множители, нули и знаки, ответ промежутками. Образец записи — в памятке.

1. Решите неравенство: $\frac{8}{x+2} \geq x$.

Ответ: _____

2. Решите неравенство: $\frac{(x-2)^2(x+1)}{x-5} \geq 0$.

Ответ: _____

3. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} -x^2 + 2x + 8 \geq 0 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \leq 1 \end{cases}$$

Ответ: _____

4. Решите неравенство: $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \geq 0$.

Ответ: _____

Ответы и ключевые точки проверки (для учителя и родителей).

1) $(-\infty; -4] \cup (-2; 2]$. (Дробь с переносом) Ключевые точки: Всё влево: $(8 - x(x + 2))/(x + 2) \geq 0$; $(x^2 + 2x - 8)/(x + 2) \leq 0$; $(x + 4)(x - 2)/(x + 2) \leq 0$. Нули $-4, 2$ (входят), -2 (выколот). Знаки справа налево: «+», «-» на $(-2; 2)$, «+», «-» левее -4 . Нельзя умножать на $x + 2$.

2) $(-\infty; -1] \cup \{2\} \cup (5; +\infty)$. (Корень чётной кратности) Ключевые точки: Нули: $-1, 2$ (чётная кратность), 5 (выколот). При $x = 6$ знак «+». Знаки: «-» на $(2; 5)$, «-» на $(-1; 2)$ (в 2 знак не меняется), «+» левее -1 . Нужно ≥ 0 : $(-\infty; -1]$, точка 2 (дробь равна 0) и $(5; +\infty)$.

3) $[1; 4]$. (Система) Ключевые точки: Первое: $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ (умножили на -1 , знак сменили), корни -2 и 4 : $[-2; 4]$. Второе: умножаем на 6 : $2(x + 2) - 3(x - 1) \leq 6$; $-x + 7 \leq 6$; $x \geq 1$: $[1; +\infty)$. Общая часть $[1; 4]$.

4) $[-2; 2] \cup [3; +\infty)$. (Кубическое, группировка) Ключевые точки: $x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x - 2)(x + 2)$. Нули $-2, 2, 3$. Справа «+», на $(2; 3)$ «-», на $(-2; 2)$ «+», левее -2 «-». Нужно ≥ 0 : $[-2; 2]$ и $[3; +\infty)$.

Как проверять. Ответ без хода решения не засчитывается. Если ход верный, а ошибка в вычислении или скобке — 1 балл из 2. Задача 1: проверить, что не было умножения на $x + 2$ и что -2 выколота. Задача 2: проверить, что отдельная точка 2 попала в ответ. Задача 3: проверить смену знака при умножении на -1 и общую часть (пересечение). Задача 4: проверить, что многочлен разложен, а корни входят в ответ.

Неравенства (№13, №20)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, №13 часть 1 и №20 часть 2). **Как пользоваться:** сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи есть похожая для самостоятельного решения (ответы в конце файла). **Где мы в теме:**

Задача 0. Квадратное неравенство

Условие. Решите неравенство $x^2 - x - 6 \geq 0$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Квадратное неравенство: слева квадратный трёхчлен, справа ноль, знак нестрогий. Нужно найти все x , при которых трёхчлен не меньше нуля.

Учитель: Что в такой задаче легко упустить?

Ученик: Скобки: знак $\geq$, значит, концы входят. И что решений может быть два промежутка, а не один.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: С чем из программы это связано и что мы там делали?

Ученик: С квадратичной функцией. Корни трёхчлена делят ось на промежутки, и на каждом промежутке знак трёхчлена один и тот же.

Учитель: Верно. Формулировка из учебника: неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0 , ≥ 0 , ≤ 0), где $a \neq 0$, называют квадратным; его решают, найдя корни трёхчлена и определив по параболе, где он принимает нужные значения.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до того, как начнёшь считать.

Ученик: Найти корни. Нарисовать параболу. Выбрать промежутки. Поставить скобки. Проверить числом.

Учитель: Фиксируем: 1. Найти корни трёхчлена (D или теорема Виета). 2. Схематично изобразить параболу (куда направлены ветви?) и отметить корни. 3. Выбрать промежутки: « > 0 » — выше оси, « < 0 » — ниже оси. 4. Расставить скобки: нестрогий знак — квадратные, строгий — круглые. 5. Проверить одно число из ответа и одно не из ответа.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Найди корни. Откуда берёшь формулу?

Задача 1. Дробь с переносом слагаемых

Условие. Решите неравенство $6/(x + 1) \geq x$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Дробно-рациональное неравенство: x стоит в знаменателе. Справа не ноль, а x .

Учитель: Что в такой задаче опасно?

Ученик: Умножить обе части на $x + 1$: я не знаю, положительное оно или отрицательное. И точка $x = -1$ запрещена, там знаменатель ноль.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что мы знаем про знак дроби?

Ученик: Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Дробь положительна, когда числитель и знаменатель одного знака.

Учитель: Верно. Поэтому такое неравенство приводят к виду «дробь > 0 » и решают методом интервалов: нули

теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка. **Задачи разбора:** 0. Квадратное неравенство. 1. Дробь с переносом слагаемых. 2. Корень чётной кратности и изолированная точка. 3. Система: квадратное и линейное. 4. Трёхчлен без корней. 5. Кубическое неравенство (группировка).

Ученик: Дискриминант: $D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$. Корни $x = (1 \pm 5)/2$: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Учитель: Как можно проверить без дискриминанта?

Ученик: По Виета: сумма корней равна 1, произведение равно -6 . Подходят 3 и -2 .

Учитель: Шаг 2. Куда направлены ветви?

Ученик: Вверх, потому что коэффициент при x^2 равен 1, то есть положителен.

Учитель: Шаг 3. Где парабола не ниже оси?

Ученик: Левее -2 и правее 3, плюс сами точки -2 и 3, потому что там трёхчлен равен нулю.

Если ученик ответит: $[-2; 3]$. **Учитель:** Проверь число 0 из этого отрезка: чему равно $0^2 - 0 - 6$ и верно ли, что оно не меньше нуля?

Учитель: Шаг 4. Запиши ответ со скобками.

Ученик: $x \leq -2$ или $x \geq 3$, то есть $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Квадратные скобки у -2 и 3, у бесконечности круглые.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: Возьму 0 (не из ответа): $0 - 0 - 6 = -6$, это меньше нуля, значит, 0 не подходит, всё верно. Возьму 4 (из ответа): $16 - 4 - 6 = 6 \geq 0$, подходит. И концы: при $x = -2$ получаем $4 + 2 - 6 = 0$, подходит.

Учитель: Как записать ответ?

Ученик: Промежутками через знак объединения: $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты в следующий раз узнаешь такое задание?

Ученик: Слева трёхчлен второй степени, справа ноль.

Учитель: Реши самостоятельно: $x^2 + x - 12 \leq 0$. Ответ в конце файла.

числителя и знаменателя делят ось на промежутки, в каждом знак дроби постоянен.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до счёта.

Ученик: Всё влево. Привести к одной дроби. Разложить числитель и знаменатель. Отметить нули. Расставить знаки. Выбрать промежутки. Проверить.

Учитель: Фиксируем: 1. Перенести всё в левую часть, привести к одной дроби. 2. Разложить числитель и знаменатель на множители. 3. Отметить нули на оси: нули знаменателя выколоты всегда, нули числителя закрашены при $\geq$ и $\leq$. 4. Расставить знаки справа налево. 5. Выбрать промежутки нужного знака, записать ответ. 6. Проверить числами.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Перенеси x влево и приведи к общему знаменателю.

Ученик: $6/(x+1) - x \geq 0$. Общий знаменатель $x+1$, поэтому x умножаю на $(x+1)$: $(6 - x(x+1))/(x+1) \geq 0$, то есть $(6 - x - x^2)/(x+1) \geq 0$, или $(-x^2 - x + 6)/(x+1) \geq 0$.

Если ученик ответит: «Умножу обе части на $x+1$, получу $6 \geq x(x+1)$ ». **Учитель:** Возьми $x = -5$. Чему равен $x+1$ и что тогда произойдёт со знаком неравенства при умножении? Подойдёт ли $x = -5$ в исходное неравенство? А в твой ответ $[-3; 2]$?

Учитель: Шаг 2. У числителя отрицательный старший коэффициент. Что делаем?

Ученик: Умножаю обе части на -1 и меняю знак: $(x^2 + x - 6)/(x+1) \leq 0$. Корни числителя: $D = 1 + 24 = 25$, $x = (-1 \pm 5)/2$, то есть 2 и -3 . Значит, $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, и неравенство имеет вид $(x-2)(x+3)/(x+1) \leq 0$.

Учитель: Шаг 3. Какие точки отмечаем и какие они?

Ученик: -3 и 2 — нули числителя, закрашены, потому что знак $\leq$. -1 — нуль знаменателя, выколота всегда.

Учитель: Шаг 4. Какой знак у дроби правее 2 ?

Ученик: Возьму $x = 3$: $(1)(6)/4 > 0$, значит, «+». Дальше знаки чередуются справа налево: на $(-1; 2)$ «-», на $(-3; -1)$ «+», на $(-\infty; -3)$ «-».

Учитель: Шаг 5. Что выбираем?

Ученик: Знак ≤ 0 : промежутки «-» и нули числителя. Это $(-\infty; -3]$ и $(-1; 2]$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: $x = 1$: $6/2 = 3 \geq 1$, верно. $x = -2$: $6/(-1) = -6$, а $-6 \geq -2$ неверно, значит, -2 в ответ не входит, это сходится. $x = -4$: $6/(-3) = -2 \geq -4$, верно.

Учитель: Ответ?

Ученик: $(-\infty; -3] \cup (-1; 2]$.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: x в знаменателе и справа не ноль. Значит, всё влево, одна дробь, метод интервалов, на $x+1$ не умножать.

Учитель: Реши самостоятельно: $12/(x+1) \geq x$.

Задача 2. Корень чётной кратности и изолированная точка

Условие. Решите неравенство $(x-1)^2(x+3)/(x-4) \geq 0$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Дробь, числитель уже разложен на множители, справа ноль, знак нестрогий. Один множитель стоит в квадрате.

Учитель: Чем опасен этот квадрат?

Ученик: В точке $x = 1$ знак, наверное, не меняется. А сама дробь там равна нулю, и это решение при $\geq$.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что мы знаем про метод интервалов?

Ученик: Знаки справа налево чередуются. Но через корень чётной кратности знак не меняется, потому что множитель в чётной степени с обеих сторон положителен.

Учитель: Верно. Правило: знак выражения меняется при переходе через корень нечётной кратности и не меняется при переходе через корень чётной кратности.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до счёта.

Ученик: Найти нули. Определить знак справа. Расставить знаки с учётом кратности. Выбрать промежутки. Проверить нули числителя, которые попали в «минус».

Учитель: Фиксируем: 1. Найти нули числителя и знаменателя, указать кратность. 2. Определить знак на самом правом промежутке (подставить число). 3. Расставить знаки справа налево: менять при нечётной кратности, не менять при чётной. 4. Выбрать промежутки нужного знака, учесть, закрашены ли концы. 5. Отдельно проверить корни числителя чётной кратности: при $\geq$ и $\leq$ они входят в ответ. 6. Проверить числами.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Какие нули и какие они?

Ученик: Числитель: -3 (кратность 1) и 1 (кратность 2). Знаменатель: 4 , выколота.

Учитель: Шаг 2. Знак правее 4 ?

Ученик: $x = 5$: $(4)^2(8)/1 = 16 \cdot 8 > 0$, «+».

Учитель: Шаг 3. Расставь знаки справа налево.

Ученик: Через 4 знак меняется: на $(1; 4)$ «-». Через 1 знак не меняется: на $(-3; 1)$ тоже «-». Через -3 меняется: на $(-\infty; -3)$ «+».

Если ученик ответит: «В точке 1 знак меняется, поэтому на $(-3; 1)$ плюс». **Учитель:** Возьми $x = 0$. Чему равно $(x-1)^2$, чему равно $x+3$ и чему равно $x-4$? Какой знак у дроби?

Учитель: Шаг 4. Что выбираем при ≥ 0 ?

Ученик: Промежутки «+»: $(-\infty; -3)$ и $(4; +\infty)$. Точку -3 закрашиваю: числитель там ноль. Точку 4 выкалываю.

Учитель: Шаг 5. Что с точкой 1 ?

Ученик: Числитель ноль, дробь равна 0 , а $0 \geq 0$ верно. Значит, $x = 1$ тоже решение, отдельная точка.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверка?

Ученик: $x = 1$: $0/(-3) = 0 \geq 0$, подходит. $x = 0$: $(1 \cdot 3)/(-4) < 0$, не подходит, и на $(-3; 1)$ минус, всё сходится. $x = 5$: $(16 \cdot 8)/1 > 0$, подходит.

Учитель: Ответ?

Ученик: $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup (4; +\infty)$.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: Есть множитель в чётной степени и знак нестрогий. Значит, после метода интервалов отдельно проверяю эту точку.

Учитель: Реши самостоятельно: $(x+1)^2(x-2)/(x-5) \leq 0$.

Задача 3. Система: квадратное и линейное

Условие. Решите систему неравенств: (1) $x^2 - 3x - 10 < 0$; (2) $(3-x)/2 \leq (x+1)/3$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Система из двух неравенств с одной переменной. Первое квадратное, второе линейное с дробями. Ответ — общая часть решений.

Учитель: Что легко перепутать?

Ученик: Пересечение с объединением. И строгость скобок на концах.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что называют решением системы неравенств?

Ученик: Значения переменной, при которых верно каждое неравенство системы.

Учитель: Верно. Чтобы решить систему, решают каждое неравенство, отмечают решения на одной числовой прямой и находят их общую часть.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до счёта.

Ученик: Решить первое. Решить второе. Нарисовать оба решения на одной прямой. Взять общую часть. Проверить концы.

Учитель: Фиксируем: 1. Решить первое неравенство. 2. Решить второе неравенство. 3. Отметить оба решения на одной числовой прямой. 4. Взять общую часть (пересечение), проверить, входят ли концы. 5. Записать ответ.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Решай первое.

Ученик: Корни $x^2 - 3x - 10 = 0$: $D = 9 + 40 = 49$, $x = (3 \pm 7)/2$, то есть 5 и -2 . Ветви вверх, нужно « < 0 » — между корнями: $(-2; 5)$.

Если ученик ответит: $x < -2$ и $x > 5$. **Учитель:** Возьми $x = 0$, он между корнями. Чему равно $0 - 0 - 10$ и верно ли, что оно меньше нуля?

Задача 4. Трёхчлен без корней

Условие. Решите неравенство $(x^2 - 6x + 10)/(9 - x^2) \leq 0$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Дробь: в числителе трёхчлен, в знаменателе $9 - x^2$, справа ноль, знак $\leq$.

Учитель: На что смотрим в числителе?

Ученик: Есть ли у него корни. Если их нет, знак трёхчлена один и тот же.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что мы знаем про квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом?

Ученик: Если $D < 0$ и $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ при любом x : парабола целиком выше оси.

Учитель: Верно. А дробь отрицательна, когда числитель и знаменатель имеют разные знаки.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Фиксируем шаги: 1. Для каждого трёхчлена найти D и определить, есть ли корни. 2. Если знак числителя постоянен, заменить дробь равносильным неравенством для знаменателя. 3. Решить полученное неравенство. 4. Поставить скобки, учитывая, что знаменатель не равен нулю. 5. Проверить числами.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Что с числителем?

Ученик: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$, ветви вверх. Числитель положителен при любом x . Ещё

Задача 5. Кубическое неравенство (группировка)

Условие. Решите неравенство $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 \geq 0$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Учитель: Шаг 2. Решай второе. Как избавишься от дробей?

Ученик: Умножу обе части на 6, это положительное число, знак не меняется: $3(3 - x) \leq 2(x + 1)$. Раскрываю: $9 - 3x \leq 2x + 2$. Переносу: $9 - 2 \leq 2x + 3x$, $7 \leq 5x$, $x \geq 7/5 = 1,4$.

Если ученик ответит: $x \leq 1,4$. **Учитель:** Подставь $x = 0$ в исходное неравенство: чему равны левая и правая части и верно ли неравенство?

Учитель: Шаг 3-4. Что общего у $(-2; 5)$ и $[1,4; +\infty)$?

Ученик: Левый конец 1,4 входит, потому что во втором неравенстве знак нестрогий. Правый конец 5 не входит, в первом знак строгий. Общая часть $[1,4; 5)$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: $x = 1,4$: первое $1,96 - 4,2 - 10 < 0$, верно; второе $(3 - 1,4)/2 = 0,8$ и $(1,4 + 1)/3 = 0,8$, нестрогое, верно. $x = 5$: $25 - 15 - 10 = 0$, а нужно меньше нуля, поэтому 5 не входит.

Учитель: Ответ?

Ученик: $[1,4; 5)$.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: Фигурная скобка: нужна общая часть решений.

Учитель: Реши самостоятельно: система $x^2 - x - 6 > 0$ и $2x + 1 \leq 9$.

можно выделить квадрат: $(x - 3)^2 + 1 > 0$.

Учитель: Шаг 2. Значит, дробь ≤ 0 когда?

Ученик: Когда знаменатель отрицателен: $9 - x^2 < 0$.

Если ученик ответит: $9 - x^2 \leq 0$. **Учитель:** Может ли знаменатель быть равен нулю? Может ли такая дробь быть равна нулю, если числитель никогда не равен нулю?

Учитель: Шаг 3. Реши $9 - x^2 < 0$.

Ученик: $x^2 > 9$, значит, $x < -3$ или $x > 3$.

Учитель: Шаг 4. Какие скобки?

Ученик: Круглые: неравенство строгое.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверка?

Ученик: $x = 0$: $10/9 > 0$, а нужно ≤ 0 , не подходит, и 0 не в ответе. $x = 4$: $(16 - 24 + 10)/(9 - 16) = 2/(-7) < 0$, подходит.

Учитель: Ответ?

Ученик: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: В числителе трёхчлен без корней. Тогда его знак постоянен, и остаётся неравенство для знаменателя.

Учитель: Реши самостоятельно: $(x^2 + 2x + 5)/(4 - x^2) < 0$.

Ученик: Первые два слагаемых имеют общий множитель x^2 , а последние два делятся на 9.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Какой способ разложения на множители подходит?

Ученик: Способ группировки: объединить слагаемые в группы, вынести общий множитель из каждой группы и затем вынести общую скобку.

Учитель: Верно. Потом применяем метод интервалов к произведению линейных множителей.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Фиксируем: 1. Разложить многочлен на множители (группировка, вынесение за скобку, формулы). 2. Найти нули множителей, отметить на оси. 3. Определить знак на самом правом промежутке. 4. Расставить знаки справа налево. 5. Выбрать промежутки нужного знака, поставить скобки. 6. Проверить числами.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Сгруппируй.

Ученик: $(x^3 - 4x^2) + (-9x + 36) = x^2(x - 4) - 9(x - 4)$. Из первой группы вынес x^2 , из второй вынес -9 : $-9x + 36 = -9(x - 4)$. Общая скобка $(x - 4)$: $(x - 4)(x^2 - 9) = (x - 4)(x - 3)(x + 3)$.

Если ученик ответит: $x^2(x - 4) + 9(x - 4)$. **Учитель:** Раскрой скобки в $9(x - 4)$. Получится ли в точности последнее слагаемое $-9x + 36$?

Ответы на задачи для самостоятельного решения

0. $x^2 + x - 12 \leq 0$: $[-4; 3]$. Корни -4 и 3 (по Виета), ветви вверх, между корнями, концы входят.
1. $12/(x + 1) \geq x$: $(-\infty; -4] \cup (-1; 3]$. $(x + 4)(x - 3)/(x + 1) \leq 0$; нули -4 , 3 входят, -1 выколота.
2. $(x + 1)^2(x - 2)/(x - 5) \leq 0$: $\{-1\} \cup [2; 5)$. Точка -1 — отдельное решение (дробь равна 0).

Учитель: Шаг 2. Нули?

Ученик: -3 , 3 и 4 , все кратности один.

Учитель: Шаг 3. Знак справа от 4?

Ученик: $x = 5$: $(1)(2)(8) > 0$, «+».

Учитель: Шаг 4. Расставь знаки.

Ученик: Справа налево чередуются: на $(3; 4)$ «-», на $(-3; 3)$ «+», на $(-\infty; -3)$ «-».

Учитель: Шаг 5. Что выбираем при ≥ 0 ?

Ученик: Промежутки «+» и нули: $[-3; 3]$ и $[4; +\infty)$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверка?

Ученик: $x = 0$: $36 \geq 0$, подходит. $x = 3,5$: $42,875 - 49 - 31,5 + 36 = -1,625 < 0$, не подходит, это промежуток $(3; 4)$, сходится. $x = 5$: $125 - 100 - 45 + 36 = 16 > 0$, подходит.

Учитель: Ответ?

Ученик: $[-3; 3] \cup [4; +\infty)$.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: Многочлен с четырьмя слагаемыми, где слагаемые попарно имеют общий множитель: сначала группировка, потом метод интервалов.

Учитель: Реши самостоятельно: $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 \geq 0$.

3. $x^2 - x - 6 > 0$ и $2x + 1 \leq 9$: $(-\infty; -2) \cup (3; 4]$. Первое: $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; второе: $x \leq 4$.
4. $(x^2 + 2x + 5)/(4 - x^2) < 0$: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Числитель всегда положителен ($D < 0$), нужно $4 - x^2 < 0$.
5. $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 \geq 0$: $[-5; 2] \cup [5; +\infty)$. $(x - 2)(x - 5)(x + 5) \geq 0$.

План урока и домашнего задания • неравенства (№13, №20)

Индивидуальное занятие, 60 минут, 9 класс, подготовка к ОГЭ. Для репетитора: на печать 1 страница.

Цель

К концу урока ученик называет вид неравенства и выбирает метод до счёта, не меняя знак неравенства по ошибке и не теряя точки; записывает одно дробное неравенство так, чтобы эксперт поставил 2 балла: преобразования, нули и знаки, верные скобки и все промежутки.

Ход урока

Минуты	Что делаем	Материал
0-5	Устный опрос. Пять вопросов подряд без подготовки: 4, 7, 9, 11, 14. Ошибку не поправляем, записываем: вернёмся на 5-й минуте.	Теория и опрос, вопросы
5-12	Открытие. Просим решить $x^2 > 9$. Ученик, как правило, записывает $x > 3$ или $x > \pm 3$. Просим подставить $x = -5$: $25 > 9$ верно, значит, -5 тоже решение. Получаем два луча. Фиксируем: квадратное неравенство решается по параболе, ответ — два луча или отрезок.	Теория, правила 4 и 6; чистый лист
12-27	Разбор вслух двух задач по этапам диалога «Что мы видим — правило — алгоритм — решение — проверка»: задача 0 (квадратное) и задача 1 (дробь с переносом). Ученик сам называет алгоритм до счёта.	Диалог-разбор, задачи 0 и 1
27-35	Пятиминутка (вариант А), 7 минут без подсказок, затем сверка по ответам и разбор ошибок. Проверяем подстановкой числа.	Карточки-пятиминутки
35-50	Самостоятельная задача уровня №20: задача 2 или 5 в интерактивном тренажёре по шагам; затем та же задача записывается на листе как на экзамене.	Тренажёр по шагам; памятка
50-57	Учитель — эксперт. Проверяем запись по чек-листу памятки (5 мест, где ставится балл). Ученик находит, где потерял бы балл, и переписывает.	Памятка, образец записи
57-60	Итог и ДЗ. Вопрос: «По каким признакам ты выбираешь метод?» (линейное — перенос и деление, знак меняется при $-$; квадратное — корни и парабола; x в знаменателе — одна дробь и метод интервалов, нули знаменателя выколоты; множитель в квадрате — проверить точку; четыре слагаемых — группировка; фигурная скобка — общая часть). Выдаём домашнюю карточку.	Домашняя карточка

Как подстроить под уровень

- **Трек А:** в блоке 12-27 разбираем задачи 0 и 3 целиком по диалогу; самостоятельно — задача 4 (трёхчлен без корней) или 5 по шагам; ДЗ — задачи 1 и 3 из карточки.
- **Трек В:** план как есть; задачу 1 ученик решает сразу сам, учитель только слушает.
- **Трек С:** вместо задач 0 и 1 берём 2 и 5; в блоке 35-50 — задача 2 без подсказок; вопрос «Можно ли решить быстрее, не расписывая все знаки?» (проверка по одной точке и учёт чётной кратности).

Домашнее задание

1. Домашняя карточка из 4 задач (№20), оформить полностью. Срок — к следующему занятию.
2. Интерактивный тест «Неравенства» (10 вопросов). Цель — не меньше 8.
3. Тренажёр «новые числа каждый раз»: 10 задач, разные типы; записать, какие типы вызвали ошибки.

Следующее занятие

Первые 5 минут — три вопроса из опроса (3, 5, 12). Затем проверка ДЗ по ключевым точкам в конце карточки. Через неделю зачётный лист: уровень 1 обязателен, уровни 2 и 3 по треку. Если уровень 1 ниже 3 баллов из 4, возвращаемся к правилам 1-5 в теории и к пятиминутке.