

Квадратные уравнения: теория и устный опрос

№9 (часть 1) и №20 (часть 2) ОГЭ. Печать: 2 страницы А4.

Теория

1. Определение. Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Числа a , b , c называют коэффициентами: a — первый (старший) коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член. Уравнение, в котором $b = 0$ или $c = 0$, называют неполным квадратным уравнением. Пример: в уравнении $2x^2 - 5x + 3 = 0$ имеем $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$. Прежде чем применять формулы, уравнение приводят к виду $ax^2 + bx + c = 0$: раскрывают скобки и переносят все слагаемые в левую часть.

2. Неполные квадратные уравнения. 1) Уравнение $ax^2 + c = 0$ приводят к виду $x^2 = -c/a$. Если $-c/a > 0$, то у уравнения два корня: $x = \pm\sqrt{-c/a}$; если $-c/a < 0$, корней нет. Пример: $x^2 - 49 = 0$, $x^2 = 49$, $x = 7$ или $x = -7$. 2) Уравнение $ax^2 + bx = 0$ решают разложением на множители: $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, поэтому $x = 0$ или $x = -b/a$. Пример: $x^2 + 6x = 0$, $x(x + 6) = 0$, $x = 0$ или $x = -6$. Обе части на x делить нельзя: потеряется корень 0. 3) Уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

3. Дискриминант и формула корней. Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения. Если $D > 0$, уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$. Если $D = 0$, уравнение имеет один корень: $x = -b / (2a)$. Если $D < 0$, уравнение не имеет действительных корней. Пример: $2x^2 - 3x - 5 = 0$; $D = 9 + 40 = 49$; $x = (3 \pm 7) / 4$; $x_1 = 2,5$; $x_2 = -1$.

4. Чётный второй коэффициент. Если $b = 2k$, удобно пользоваться дискриминантом $D_1 = k^2 - ac$. Тогда корни находят по формуле $x = (-k \pm \sqrt{D_1}) / a$. Пример: $x^2 - 6x + 5 = 0$; $k = -3$; $D_1 = 9 - 5 = 4$; $x = 3 \pm 2$; $x_1 = 5$, $x_2 = 1$.

5. Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$. Для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 = c/a$. Верна и обратная теорема: если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то они — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Пример: $x^2 - 7x + 12 = 0$; сумма корней 7, произведение 12; корни 3 и 4. Теоремой Виета подбирают целые корни и проверяют найденные.

6. Разложение на множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Пример: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Это разложение используют для сокращения дробей и для решения уравнений более высоких степеней.

7. Уравнения, сводящиеся к квадратным (№20). а) Замена переменной. В уравнении $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$ вводят $t = x^2 - 3x$, решают $t^2 - 2t - 8 = 0$, затем решают уравнение $x^2 - 3x = t$ для каждого найденного t . Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ решают заменой $t = x^2$, где $t \geq 0$. б) Способ группировки: $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 4)$. в) Дробно-рациональные уравнения. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Сначала находят значения x , при которых знаменатели обращаются в нуль (их исключают из ответа), затем умножают обе части на общий знаменатель, решают получившееся уравнение и проверяют корни. Корень, обращающий знаменатель в нуль, называют посторонним.

8. Системы с квадратным уравнением. Из линейного уравнения системы выражают одну переменную через другую и подставляют в квадратное уравнение. Решением системы называют пару чисел $(x; y)$; ответ записывают парами.

Вопросы для устного опроса

Учитель задаёт вопрос, ответ сверяет с правой колонкой.

№	Вопрос	Ответ
1	Какое уравнение называют квадратным? Что значит условие $a \neq 0$?	Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. При $a = 0$ членов с x^2 нет, уравнение становится линейным.

2	Назовите коэффициенты уравнения $2x^2 - 5x + 3 = 0$.	$a = 2, b = -5, c = 3$.
3	Решите устно $x^2 - 49 = 0$ и $x^2 + 49 = 0$.	$x = \pm 7$; у второго корней нет (x^2 не может быть отрицательным).
4	Решите устно $x^2 + 6x = 0$. Почему нельзя поделить обе части на x ?	$x(x + 6) = 0$; $x = 0$ или $x = -6$. При делении на x теряется корень 0.
5	Запишите формулу дискриминанта. Сколько корней при $D > 0, D = 0, D < 0$?	$D = b^2 - 4ac$. Два корня; один корень; корней нет.
6	Найдите дискриминант $3x^2 - 4x - 4$ и корни.	$D = 16 + 48 = 64$; $x = (4 \pm 8) / 6$; $x = 2$ и $x = -2/3$.
7	Сколько корней у $x^2 - 4x + 5 = 0$?	$D = 16 - 20 = -4 < 0$; корней нет.
8	Сформулируйте теорему Виета для $x^2 + px + q = 0$.	$x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$.
9	Не решая, подберите корни $x^2 - 7x + 12 = 0$.	Сумма 7, произведение 12: корни 3 и 4.
10	Чему равна сумма корней уравнения $2x^2 - 6x + 1 = 0$?	По Виету $-b/a = 6/2 = 3$ (корни действительные, $D = 28 > 0$).
11	Как привести $(x - 1)(x + 2) = 4$ к виду $ax^2 + bx + c = 0$?	Раскрыть скобки: $x^2 + x - 2 = 4$; перенести: $x^2 + x - 6 = 0$.
12	Как решают биквадратное уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$?	Замена $t = x^2, t \geq 0$: $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t = 1$ или 4 ; $x = \pm 1, \pm 2$.
13	Когда дробь равна нулю? Решите $(x^2 - x - 6)/(x - 3) = 0$.	Когда числитель равен нулю, а знаменатель нет. $x = 3$ или $x = -2$; $x = 3$ посторонний; ответ -2 .
14	Что обязательно записывают в решении №20?	ОДЗ (если есть дробь), замену или преобразование, квадратное уравнение, его решение, отбор корней, ответ (все корни).