

Квадратные уравнения: теория и устный опрос

№9 (часть 1) и №20 (часть 2) ОГЭ. Печать: 2 страницы А4.

Теория

1. Определение. Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a , b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$. Числа a , b , c называют коэффициентами: a — первый (старший) коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член. Уравнение, в котором $b = 0$ или $c = 0$, называют неполным квадратным уравнением. Пример: в уравнении $2x^2 - 5x + 3 = 0$ имеем $a = 2$, $b = -5$, $c = 3$. Прежде чем применять формулы, уравнение приводят к виду $ax^2 + bx + c = 0$: раскрывают скобки и переносят все слагаемые в левую часть.

2. Неполные квадратные уравнения. 1) Уравнение $ax^2 + c = 0$ приводят к виду $x^2 = -c/a$. Если $-c/a > 0$, то у уравнения два корня: $x = \pm\sqrt{-c/a}$; если $-c/a < 0$, корней нет. Пример: $x^2 - 49 = 0$, $x^2 = 49$, $x = 7$ или $x = -7$. 2) Уравнение $ax^2 + bx = 0$ решают разложением на множители: $x(ax + b) = 0$. Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, поэтому $x = 0$ или $x = -b/a$. Пример: $x^2 + 6x = 0$, $x(x + 6) = 0$, $x = 0$ или $x = -6$. Обе части на x делить нельзя: потеряется корень 0. 3) Уравнение $ax^2 = 0$ имеет единственный корень $x = 0$.

3. Дискриминант и формула корней. Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения. Если $D > 0$, уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$. Если $D = 0$, уравнение имеет один корень: $x = -b / (2a)$. Если $D < 0$, уравнение не имеет действительных корней. Пример: $2x^2 - 3x - 5 = 0$; $D = 9 + 40 = 49$; $x = (3 \pm 7) / 4$; $x_1 = 2,5$; $x_2 = -1$.

4. Чётный второй коэффициент. Если $b = 2k$, удобно пользоваться дискриминантом $D_1 = k^2 - ac$. Тогда корни находят по формуле $x = (-k \pm \sqrt{D_1}) / a$. Пример: $x^2 - 6x + 5 = 0$; $k = -3$; $D_1 = 9 - 5 = 4$; $x = 3 \pm 2$; $x_1 = 5$, $x_2 = 1$.

5. Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$. Для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 = c/a$. Верна и обратная теорема: если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то они — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Пример: $x^2 - 7x + 12 = 0$; сумма корней 7, произведение 12; корни 3 и 4. Теоремой Виета подбирают целые корни и проверяют найденные.

6. Разложение на множители. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Пример: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Это разложение используют для сокращения дробей и для решения уравнений более высоких степеней.

7. Уравнения, сводящиеся к квадратным (№20). а) Замена переменной. В уравнении $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$ вводят $t = x^2 - 3x$, решают $t^2 - 2t - 8 = 0$, затем решают уравнение $x^2 - 3x = t$ для каждого найденного t . Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ решают заменой $t = x^2$, где $t \geq 0$. б) Способ группировки: $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = x^2(x + 3) - 4(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 4)$. в) Дробно-рациональные уравнения. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Сначала находят значения x , при которых знаменатели обращаются в нуль (их исключают из ответа), затем умножают обе части на общий знаменатель, решают получившееся уравнение и проверяют корни. Корень, обращающий знаменатель в нуль, называют посторонним.

8. Системы с квадратным уравнением. Из линейного уравнения системы выражают одну переменную через другую и подставляют в квадратное уравнение. Решением системы называют пару чисел $(x; y)$; ответ записывают парами.

Вопросы для устного опроса

Учитель задаёт вопрос, ответ сверяет с правой колонкой.

№	Вопрос	Ответ
1	Какое уравнение называют квадратным? Что значит условие $a \neq 0$?	Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$. При $a = 0$ членов с x^2 нет, уравнение становится линейным.

2	Назовите коэффициенты уравнения $2x^2 - 5x + 3 = 0$.	$a = 2, b = -5, c = 3$.
3	Решите устно $x^2 - 49 = 0$ и $x^2 + 49 = 0$.	$x = \pm 7$; у второго корней нет (x^2 не может быть отрицательным).
4	Решите устно $x^2 + 6x = 0$. Почему нельзя поделить обе части на x ?	$x(x + 6) = 0$; $x = 0$ или $x = -6$. При делении на x теряется корень 0.
5	Запишите формулу дискриминанта. Сколько корней при $D > 0, D = 0, D < 0$?	$D = b^2 - 4ac$. Два корня; один корень; корней нет.
6	Найдите дискриминант $3x^2 - 4x - 4$ и корни.	$D = 16 + 48 = 64$; $x = (4 \pm 8) / 6$; $x = 2$ и $x = -2/3$.
7	Сколько корней у $x^2 - 4x + 5 = 0$?	$D = 16 - 20 = -4 < 0$; корней нет.
8	Сформулируйте теорему Виета для $x^2 + px + q = 0$.	$x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$.
9	Не решая, подберите корни $x^2 - 7x + 12 = 0$.	Сумма 7, произведение 12: корни 3 и 4.
10	Чему равна сумма корней уравнения $2x^2 - 6x + 1 = 0$?	По Виету $-b/a = 6/2 = 3$ (корни действительные, $D = 28 > 0$).
11	Как привести $(x - 1)(x + 2) = 4$ к виду $ax^2 + bx + c = 0$?	Раскрыть скобки: $x^2 + x - 2 = 4$; перенести: $x^2 + x - 6 = 0$.
12	Как решают биквадратное уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$?	Замена $t = x^2, t \geq 0$: $t^2 - 5t + 4 = 0$; $t = 1$ или 4 ; $x = \pm 1, \pm 2$.
13	Когда дробь равна нулю? Решите $(x^2 - x - 6)/(x - 3) = 0$.	Когда числитель равен нулю, а знаменатель нет. $x = 3$ или $x = -2$; $x = 3$ посторонний; ответ -2 .
14	Что обязательно записывают в решении №20?	ОДЗ (если есть дробь), замену или преобразование, квадратное уравнение, его решение, отбор корней, ответ (все корни).

Карточки-пятиминутки · квадратные уравнения

Печать: оба варианта на одном листе А4, разрезать по пунктиру. Ответы внизу отрезать до раздачи.

Вариант А

Фамилия, имя: 5–7 мин

1. Решите уравнение $x^2 - 9 = 0$. Если корней несколько, запишите больший.

[illegible]

Ответ:

2. Решите уравнение $x^2 + 7x = 0$. Запишите меньший корень.

[illegible]

Ответ:

3. Решите уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ и проверьте корни по теореме Виета. Запишите корни через точку с запятой.

[illegible]

Ответ:

4. Решите уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$.
Запишите больший корень.

[illegible]

Ответ:

5. Решите уравнение $(x - 1)(x + 2) = 4$.
Запишите меньший корень. Сначала
приведите к виду $ax^2 + bx + c = 0$.

[illegible]

Ответ:

Вариант Б

Фамилия, имя: 5-7 мин

1. Решите уравнение $x^2 - 16 = 0$. Если корней несколько, запишите больший.

[illegible]

Ответ:

2. Решите уравнение $x^2 - 6x = 0$. Запишите больший корень.

[illegible]

Ответ:

3. Решите уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$ и проверьте корни по теореме Виета. Запишите корни через точку с запятой.

[illegible]

Ответ:

4. Решите уравнение $2x^2 + 3x - 2 = 0$.
Запишите меньший корень.

[illegible]

Ответ:

5. Решите уравнение $(x + 1)(x - 3) = 5$.
Запишите меньший корень. Сначала приведите к виду $ax^2 + bx + c = 0$.

[illegible]

Ответ:

Ответы (отрезать до раздачи). Вариант А: 1) 3. 2) -7 . 3) 2; 3 (сумма 5, произведение 6). 4) $D = 49$, $x = 2,5$ и -1 ; больший 2,5. 5) $x^2 + x - 6 = 0$; корни 2 и -3 ; меньший -3 . **Вариант Б:** 1) 4. 2) 6. 3) 2; 5 (сумма 7, произведение 10). 4) $D = 25$, $x = 0,5$ и -2 ; меньший -2 . 5) $x^2 - 2x - 8 = 0$; корни 4 и -2 ; меньший -2 .

Памятка: алгоритм и оформление, квадратные уравнения (№9 и №20)

№9 — в бланк записывают только ответ (1 балл). №20 — решение записывают полностью на бланке №2 (2 балла).

Алгоритм решения

1. **Определи тип.** Квадратное уравнение, дробь, замена (повторяющееся выражение), кубическое, система.
2. **Если есть дробь — запиши ОДЗ.**
Знаменатели не равны нулю: $x \neq \dots$
3. **Приведи к виду $ax^2 + bx + c = 0$:** раскрой скобки, перенеси всё влево, собери подобные. Если $a < 0$, можно умножить на -1 .
4. **Выбери способ.** Нет c — вынеси x за скобку. Нет b — $x^2 = \text{число}$. Иначе дискриминант $D = b^2 - 4ac$ (проверь Виетом: сумма $-b/a$, произведение c/a).
5. **Реши.** $D > 0$ — два корня, $D = 0$ — один, $D < 0$ — корней нет.
6. **Если была замена** — вернись к x и реши уравнение для каждого t . **Если была дробь** — отбрось корни из ОДЗ.
7. **Проверь** хотя бы один корень подстановкой.
Запиши ответ: все корни, а в №9 — тот, который просят (меньший, больший).

Формулы. $D = b^2 - 4ac$; $x = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$.
Виета: $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 = c/a$. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Дробь = 0, когда числитель = 0 и знаменатель $\neq 0$.

Что снимает баллы

- Деление обеих частей на x (или на скобку c x): потерял корень.
- Не приведено к виду $ax^2 + bx + c = 0$ до подсчёта D , ошибка в знаках b и c .
- Посторонний корень оставлен в ответе (в дробном уравнении без ОДЗ).
- После замены найдено t , но не найден x .
- В системе в ответе только x или только y : нужны пары.
- №9: записан не тот корень (оба вместо меньшего) или не в том виде (дробь вместо десятичной).
- Вычислительная ошибка при верном ходе — 1 балл вместо 2. Нет хода решения, только ответ — 0 баллов.

Образец записи (№20)

Задача. Решите уравнение $x/(x - 2) - 8/(x^2 - 4) = 1/(x + 2)$.

Решение. Разложим $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

ОДЗ: $x \neq 2$, $x \neq -2$.

Умножим обе части на $(x - 2)(x + 2)$:

$$x(x + 2) - 8 = x - 2.$$

$$x^2 + 2x - 8 - x + 2 = 0; x^2 + x - 6 = 0.$$

$$D = 1 + 24 = 25; x_1 = (-1 + 5)/2 = 2; x_2 = (-1 - 5)/2 = -3.$$

Число 2 не входит в ОДЗ, поэтому не является корнем уравнения.

Проверка. $x = -3$: $-3/(-5) - 8/5 = 0,6 - 1,6 = -1$; $1/(-3 + 2) = -1$. Верно.

Ответ: -3 .

Где эксперт ищет баллы: 1) записана ОДЗ или есть проверка знаменателей; 2) уравнение верно преобразовано к квадратному; 3) квадратное уравнение верно решено (D и корни); 4) отобран корень; 5) в ответ записаны все корни и только они.

№9: как записать

Решение на бланк не пишут, но считать нужно на черновике полностью. Пример: «Найдите корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Если корней несколько, запишите меньший из них». Ответ: 2. Если корень десятичная дробь, пишут через запятую: 2,5. Проверка Виетом: сумма 5, произведение 6.

Зачётный лист · квадратные уравнения (№9 и №20)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____ Баллы: ____ / 16 Оценка: ____

Три уровня. Уровень 1 обязателен для всех, в бланк записывают только ответ. Задания уровней 2 и 3 оформляйте полностью, как на экзамене: ОДЗ (если есть дробь), преобразования, дискриминант, корни, отбор, ответ.

Уровень 1 · базовый (№9) · по 1 баллу (6)

1. Решите уравнение $x^2 - 25 = 0$. Если корней несколько, запишите меньший.

Ответ: _____

2. Решите уравнение $x^2 + 9x = 0$. Если корней несколько, запишите больший.

Ответ: _____

3. Решите уравнение $x^2 - 8x + 15 = 0$. Запишите корни через точку с запятой.

Ответ: _____

4. Решите уравнение $2x^2 + x - 6 = 0$. Запишите меньший корень.

Ответ: _____

5. Решите уравнение $x^2 - 5x = 14$. Запишите больший корень.

Ответ: _____

6. Решите уравнение $(x - 4)^2 = 9$. Запишите больший корень.

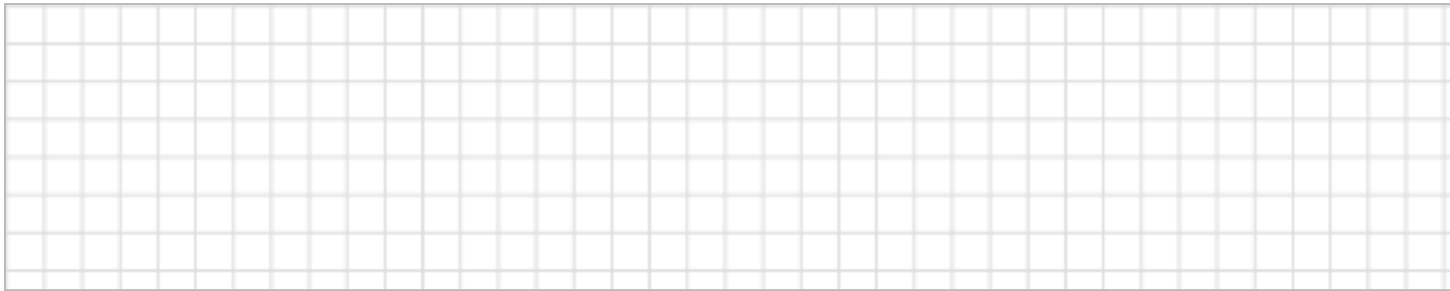
Ответ:

Уровень 2 · как на ОГЭ (№20) · по 2 балла (6)

7. Решите уравнение $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 25$.

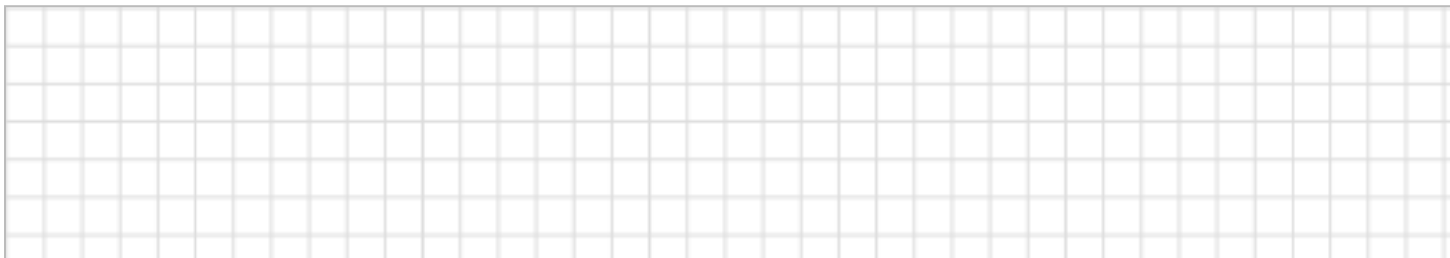
Ответ:

8. Решите уравнение $1/(x - 1) + 1/(x + 1) = 4/3$.



Ответ: _____

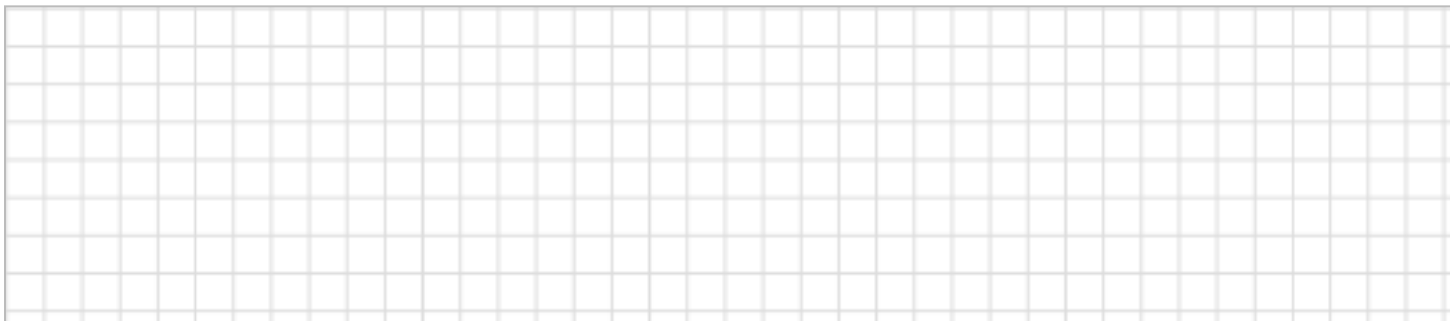
9. Решите уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.



Ответ: _____

Уровень 3 · повышенный (№20) · по 2 балла (4)

10. Решите уравнение $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.



Ответ: _____

11. Решите уравнение $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$.



Ответ: _____

Ответы и критерии (для учителя; ученику печатать страницы 1-2).

1-6) 1) -5. 2) 0. 3) 3; 5. 4) -2 ($D = 49$, $x = (-1 \pm 7)/4$: 1,5 и -2). 5) 7 ($x^2 - 5x - 14 = 0$, корни 7 и -2). 6) 7 ($x - 4 = \pm 3$, корни 7 и 1).

7) -1; 0. $x^2 - 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 = 25$; $2x^2 + 2x = 0$; $2x(x + 1) = 0$. Ошибка: $(x - 3)^2 = x^2 - 9$; сокращение на x .

8) -0,5; 2. ОДЗ $x \neq \pm 1$; $2x/(x^2 - 1) = 4/3$; $6x = 4x^2 - 4$; $2x^2 - 3x - 2 = 0$; $D = 25$; $x = (3 \pm 5)/4 = 2$ и $-0,5$. Оба корня входят в ОДЗ.

9) -3; -1; 1; 3. $t = x^2$, $t^2 - 10t + 9 = 0$; $t = 1$ или 9 ; $x = \pm 1$, ± 3 . Ошибка: ответ $t = 1, 9$; потеря отрицательных корней.

10) -3; -2; 1; 2. $t = x^2 + x$; $t^2 - 8t + 12 = 0$; $t = 2$ или 6 . $x^2 + x - 2 = 0$: 1 и -2. $x^2 + x - 6 = 0$: 2 и -3. Ошибка: остановиться на t .

11) -3; 2; 3. $x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x - 3)(x + 3) = 0$. Ошибка: деление на $(x - 2)$, потеря корня 2.

Критерии для заданий 7-11 (2 балла): 2 — ход решения верный, все шаги выполнены, ответ верный; 1 — ход верный, но допущена одна вычислительная ошибка или описка; 0 — всё остальное. **Шкала**

(предложение, подстройте под себя): 14-16 баллов — «5», 11-13 — «4», 7-10 — «3», меньше 7 — «2».

Если уровень 1 набран меньше чем на 5 из 6, уровни 2-3 не засчитывают как уверенное владение темой.

Домашняя карточка • квадратные уравнения (№20)

Фамилия, имя: _____ Дата: _____

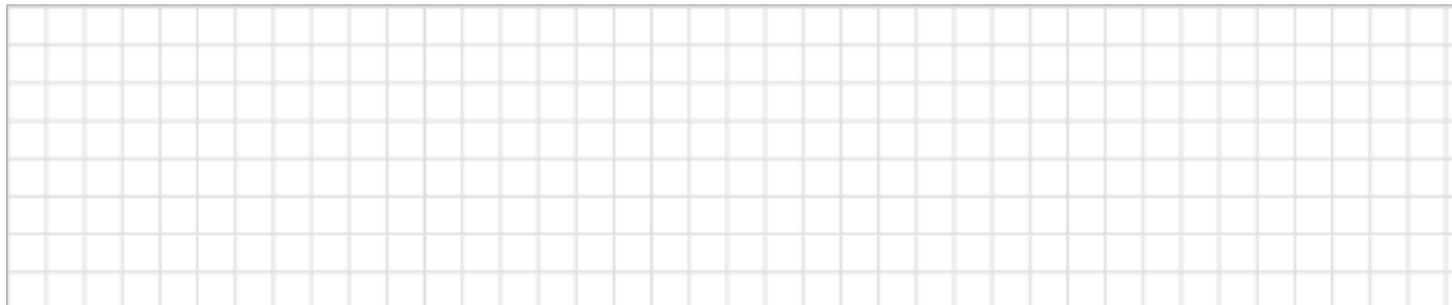
Оформите каждую задачу полностью, как на экзамене. Сначала запишите ОДЗ (если есть дробь), потом ход решения, отбор корней, проверку и ответ. Образец записи — в памятке.

1. Решите уравнение $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 6 = 0$.



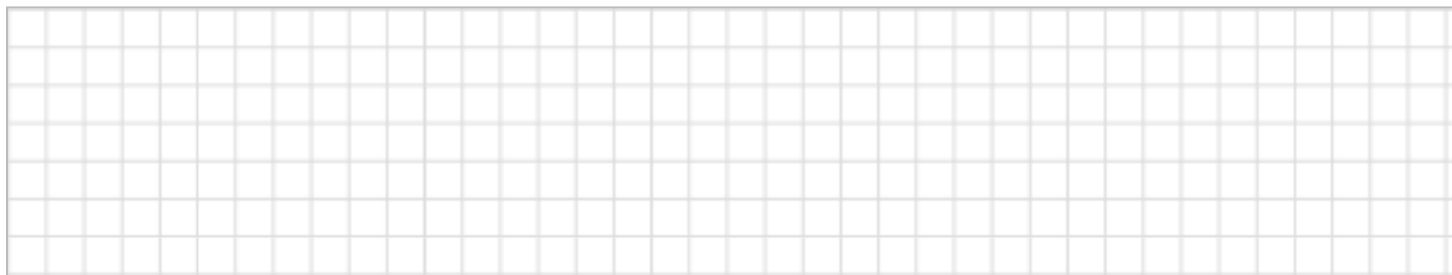
Ответ: _____

2. Решите уравнение $x/(x - 3) - 18/(x^2 - 9) = 1/(x + 3)$.



Ответ: _____

3. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.



Ответ: _____

4. Решите систему уравнений: $x^2 + y^2 = 17$, $x + y = 5$.



Ответ: _____

Ответы и ключевые точки проверки (для учителя и родителей).

1) -1; 3. Ключевые точки: введено $t = x^2 - 2x$; $t^2 - t - 6 = 0$, $t = 3$ или $t = -2$; $x^2 - 2x - 3 = 0$ даёт 3 и -1; $x^2 - 2x + 2 = 0$ имеет $D = -4 < 0$, корней нет. В ответе только -1 и 3.

2) -5. Ключевые точки: ОДЗ $x \neq 3$, $x \neq -3$; после умножения на $(x - 3)(x + 3)$: $x(x + 3) - 18 = x - 3$; $x^2 + 2x - 15 = 0$; корни 3 и -5; 3 посторонний. Ответ -5, а не «-5; 3».

3) -4; -1; 1. Ключевые точки: группировка $x^2(x + 4) - (x + 4) = (x + 4)(x^2 - 1) = (x + 4)(x - 1)(x + 1)$; три корня; без деления на $(x + 4)$.

4) (1; 4), (4; 1). Ключевые точки: $y = 5 - x$; $x^2 + (5 - x)^2 = 17$; $2x^2 - 10x + 8 = 0$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $x = 1$ или 4; $y = 4$ или 1. Ответ записан парами. Частая ошибка: $(5 - x)^2 = 25 - x^2$.

Баллы: каждая задача 2 балла (критерии те же, что в зачётном листе). 7-8 баллов — тема усвоена; 5-6 — повторить памятку и пятиминутки; меньше 5 — вернуться к теории и разбору задач 1-5.

Квадратные уравнения (№9 и №20)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, №9 часть 1 и №20 часть 2). **Как пользоваться:** сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи есть похожая для самостоятельного решения (ответы в конце файла). **Где мы в теме:** теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка. **Задачи разбора:** 0. Полное квадратное уравнение (№9). 1. Замена переменной. 2. Дробно-рациональное уравнение. 3. Кубическое уравнение, группировка. 4. Посторонний корень. 5. Система с квадратным уравнением.

Задача 0. Полное квадратное уравнение (уровень №9)

Условие. Решите уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Если корней несколько, запишите больший из них.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Квадратное уравнение, оно уже в виде $ax^2 + bx + c = 0$. Коэффициенты: $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$. В условии просят записать только больший корень.

Учитель: Откуда берётся минус у b ?

Ученик: Перед $3x$ стоит минус, значит $b = -3$. Знак коэффициента берём вместе с числом.

Учитель: Какой способ выберешь?

Ученик: Неполным оно не является, оба коэффициента b и c не равны нулю. Значит, дискриминант: $D = b^2 - 4ac$.

Учитель: Считай.

Ученик: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$. D больше нуля, будет два корня. $\sqrt{D} = 7$.

Учитель: Откуда в формуле двойка в знаменателе?

Ученик: Формула $x = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$, а у нас $a = 2$, поэтому знаменатель 4. Числитель: $-b = 3$. Получаем $x = (3 \pm 7) / 4$. Это $x_1 = 10/4 = 2,5$ и $x_2 = -4/4 = -1$.

Учитель: Проверь по Виету.

Ученик: Сумма корней должна быть $-b/a = 3/2 = 1,5$. У нас $2,5 + (-1) = 1,5$. Произведение $c/a = -5/2 = -2,5$, а $2,5 \cdot (-1) = -2,5$. Верно.

Учитель: Что запишешь в бланк?

Ученик: Больший корень, 2,5. Десятичную дробь пишу через запятую.

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $2x^2 - 7x + 3 = 0$. Запишите меньший корень.

Задача 1. Замена переменной

Условие. Решите уравнение $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Уравнение четвёртой степени, если раскрыть скобки. Это №20. Но выражение $x^2 - 3x$ встречается два раза.

Учитель: Что в такой задаче легко сделать неверно?

Ученик: Раскрывать скобки и получать длинный многочлен четвёртой степени. Или найти значение вспомогательной переменной и забыть вернуться к x .

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Какой приём применяют, если одно и то же выражение повторяется?

Ученик: Замену переменной. Это выражение обозначают новой буквой, решают более простое уравнение, потом возвращаются к x .

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Запиши шаги.

Ученик: 1) Ввести t . 2) Решить квадратное уравнение относительно t . 3) Для каждого t решить уравнение с x . 4) Собрать все корни и записать в ответ.

Задача 2. Дробно-рациональное уравнение

Условие. Решите уравнение $(x + 1)/(x - 1) + (x - 1)/(x + 1) = 10/3$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Уравнение с дробями, в знаменателях x . Значит, есть значения x , при которых знаменатель равен нулю.

Учитель: Какие?

Ученик: $x - 1 = 0$ при $x = 1$ и $x + 1 = 0$ при $x = -1$. Эти числа корнями быть не могут.

Этап 4. Решение

Учитель: Вводим замену. Откуда берём уравнение для t ?

Ученик: Пусть $t = x^2 - 3x$. Заменяю это выражение везде. Получается $t^2 - 2t - 8 = 0$.

Учитель: Решай.

Ученик: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$. $t = (2 \pm 6) / 2$: $t_1 = 4$, $t_2 = -2$.

Учитель: Что теперь?

Ученик: Возвращаюсь к x . Первое: $x^2 - 3x = 4$.

Переношу: $x^2 - 3x - 4 = 0$, $D = 9 + 16 = 25$, $x = (3 \pm 5) / 2$, это $x = 4$ и $x = -1$.

Учитель: Второе.

Ученик: $x^2 - 3x = -2$, значит $x^2 - 3x + 2 = 0$, $D = 9 - 8 = 1$, $x = (3 \pm 1) / 2$, то есть $x = 2$ и $x = 1$.

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Проверю $x = 1$: $(1 - 3)^2 - 2 \cdot (1 - 3) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$. Верно.

Учитель: Что запишешь в ответ?

Ученик: Все четыре корня: -1 ; 1 ; 2 ; 4 . Не t , а x .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как избавиться от дробей?

Ученик: Привести к общему знаменателю и умножить обе части на него, предварительно записав ОДЗ.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Записать ОДЗ. 2) Привести дроби к общему знаменателю. 3) Свести к квадратному уравнению. 4) Решить. 5) Проверить корни по ОДЗ.

Этап 4. Решение

Учитель: Какой общий знаменатель?

Ученик: $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Первую дробь домножаю на $(x + 1)$, вторую на $(x - 1)$: числитель $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2$.

Учитель: Куда делись слагаемые $2x$ и $-2x$?

Ученик: Сократились: их сумма равна нулю.

Учитель: Что записываешь дальше?

Ученик: $(2x^2 + 2)/(x^2 - 1) = 10/3$. По основному свойству пропорции $3(2x^2 + 2) = 10(x^2 - 1)$. Раскрываю: $6x^2 + 6 = 10x^2 - 10$. Переносу: $4x^2 = 16$, $x^2 = 4$, $x = 2$ или $x = -2$.

Задача 3. Кубическое уравнение, группировка

Условие. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Кубическое уравнение. Формул для него в школе нет. Значит, надо разложить на множители.

Учитель: Что легко сделать неверно?

Ученик: Поделить обе части на $x + 3$. Тогда потеряю корень.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Ученик: Если у многочлена четыре члена, группируют их попарно и выносят общий множитель. Потом применяют правило: произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Сгруппировать. 2) Вынести общие множители. 3) Вынести общую скобку. 4) Разложить остаток. 5) Приравнять каждый множитель к нулю.

Задача 4. Посторонний корень

Условие. Решите уравнение $x/(x - 2) - 8/(x^2 - 4) = 1/(x + 2)$.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Дробное уравнение. В знаменателе $x^2 - 4$. Это разность квадратов, $(x - 2)(x + 2)$.

Учитель: Что легко сделать неверно?

Ученик: Не записать ОДЗ и оставить в ответе число, при котором знаменатель равен нулю.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Ученик: Как в задаче 2: ОДЗ, общий знаменатель, квадратное уравнение, отбор корней.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Разложить знаменатели. 2) Записать ОДЗ. 3) Умножить на общий знаменатель. 4) Решить. 5) Отбросить числа, не входящие в ОДЗ.

Этап 4. Решение

Учитель: ОДЗ?

Ученик: $x \neq 2$ и $x \neq -2$.

Задача 5. Система с квадратным уравнением

Условие. Решите систему уравнений: $x^2 + y^2 = 29$, $x - y = 3$.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Система из квадратного и линейного уравнений. Ответ будет в виде пар.

Учитель: Что легко сделать неверно?

Ученик: Неверно раскрыть квадрат суммы или записать в ответ только значения y .

Этап 2. Как мы решаем подобное

Ученик: Способом подстановки: из линейного уравнения выражаю одну переменную, подставляю в квадратное.

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Оба числа не равны 1 и -1 , значит, входят в ОДЗ. Проверю $x = 2$: $3/1 + 1/3 = 10/3$. Верно. Ответ: -2 ; 2 .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $(x + 2)/(x - 2) + (x - 2)/(x + 2) = 5/2$.

Этап 4. Решение

Учитель: Какие пары?

Ученик: $(x^3 + 3x^2)$ и $(-4x - 12)$. В первой вынесу x^2 , получится $x^2(x + 3)$. Во второй вынесу -4 : $-4(x + 3)$. В обеих осталась скобка $(x + 3)$.

Учитель: Что дальше?

Ученик: Выношу общую скобку: $(x + 3)(x^2 - 4) = 0$.

Разность квадратов: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Получаю $(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$.

Учитель: Откуда три корня?

Ученик: Три множителя, каждый равен нулю по очереди: $x = -3$, $x = 2$, $x = -2$.

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Проверю $x = -3$: $(-27) + 27 + 12 - 12 = 0$. Верно. Ответ: -3 ; -2 ; 2 .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$.

Учитель: Умножаем на $(x - 2)(x + 2)$. Что получается с каждой дробью?

Ученик: Первая дробь: знаменатель $x - 2$ сократился, остаётся $x(x + 2)$. Вторая: знаменатель $x^2 - 4$ сократился целиком, остаётся 8 . Третья: знаменатель $x + 2$ сократился, остаётся $x - 2$. Получаю $x(x + 2) - 8 = x - 2$.

Учитель: Дальше.

Ученик: $x^2 + 2x - 8 = x - 2$. Переносу всё влево: $x^2 + 2x - 8 - x + 2 = 0$, значит $x^2 + x - 6 = 0$. $D = 1 + 24 = 25$. $x = (-1 \pm 5) / 2$: $x = 2$ и $x = -3$.

Этап 5. Проверка и оформление

Учитель: Что делаешь с корнями?

Ученик: Сверяю с ОДЗ. Число 2 запрещено: при нём знаменатель $x - 2$ обращается в нуль, это посторонний корень. Число -3 подходит. Проверка: $-3/(-5) - 8/(9 - 4) = 0,6 - 1,6 = -1$, а $1/(-3 + 2) = -1$. Верно. Ответ: -3 .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $x/(x - 4) - 32/(x^2 - 16) = 1/(x + 4)$.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Выразить. 2) Подставить. 3) Решить квадратное. 4) Найти вторую переменную для каждого корня. 5) Записать пары.

Этап 4. Решение

Учитель: Что выражаешь?

Ученик: Из $x - y = 3$ получаю $x = y + 3$.

Учитель: Подставляй.

Ученик: $(y + 3)^2 + y^2 = 29$. Квадрат суммы: $y^2 + 6y + 9$. Складываю: $2y^2 + 6y + 9 = 29$, значит $2y^2 + 6y - 20 = 0$. Делю на 2 : $y^2 + 3y - 10 = 0$.

Учитель: Решай.

Ученик: $D = 9 + 40 = 49$. $y = (-3 \pm 7) / 2$: $y = 2$ или $y = -5$.

Учитель: Как найти x ?

Ученик: По формуле $x = y + 3$. Если $y = 2$, то $x = 5$.

Если $y = -5$, то $x = -2$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. $2x^2 - 7x + 3 = 0$: $D = 25$, $x = 3$ и $x = 0,5$; меньший корень $0,5$.
2. -1 ; 1 ; 3 ; 5 ($t = x^2 - 4x$; $t^2 - 2t - 15 = 0$; $t = 5$ или -3).
3. -6 ; 6 (ОДЗ $x \neq \pm 2$; $(2x^2 + 8)/(x^2 - 4) = 5/2$; $4x^2 + 16 = 5x^2 - 20$; $x^2 = 36$).

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Пара $(5; 2)$: $25 + 4 = 29$, $5 - 2 = 3$. Пара $(-2; -5)$: $4 + 25 = 29$, $-2 - (-5) = 3$. Обе подходят. Ответ записываю парами: $(5; 2)$, $(-2; -5)$.

Для самостоятельного решения. Решите систему уравнений: $x^2 + y^2 = 13$, $x - y = 1$.

4. -5 ; -2 ; 2 ($(x + 5)(x - 2)(x + 2) = 0$).
5. -7 (ОДЗ $x \neq \pm 4$; $x^2 + 3x - 28 = 0$; корни 4 и -7 ; число 4 посторонний).
6. $(3; 2)$, $(-2; -3)$ ($x = y + 1$; $y^2 + y - 6 = 0$; $y = 2$ или $y = -3$).

План урока и домашнего задания · квадратные уравнения (№9 и №20)

Индивидуальное занятие, 60 минут, 9 класс, подготовка к ОГЭ. Для репетитора: на печать 1 страница.

Цель

К концу урока ученик решает квадратное уравнение любого вида (полное, неполное, по Виету), называет алгоритм для №20 (замена, группировка, дробь с ОДЗ) и записывает одну задачу так, чтобы эксперт поставил 2 балла.

Ход урока

Минуты	Что делаем	Материал
0-5	Устный опрос. Пять вопросов подряд без подготовки: 3, 5, 8, 9, 13. Ошибку не поправляем, а записываем: вернёмся на 5-й минуте.	Теория и опрос, вопросы
5-12	Открытие. Просим решить $x^2 = 3x$. Ученик, как правило, делит на x и получает $x = 3$. Затем решаем $x(x - 3) = 0$ и находим 0 и 3. Вопрос: куда делся корень? Фиксируем правило 2 и ловушку: обе части на x не делят.	Теория, правило 2; чистый лист
12-27	Разбор вслух двух задач по этапам диалога «Что мы видим — правило — алгоритм — решение — проверка»: задача 1 (замена) и задача 4 (посторонний корень). Ученик сам называет алгоритм до счёта и сам считает дискриминант.	Диалог-разбор, части 1 и 4; разбор 5 задач
27-37	Пятиминутка (вариант А или Б), без подсказок, 7 минут, затем сверка и разбор ошибок. Проверяем по Виету.	Карточки-пятиминутки
37-50	Самостоятельная задача уровня №20: задача 3 (группировка) или задача 5 (система) в интерактивном тренажёре; затем та же задача записывается на листе как на экзамене.	Тренажёр по шагам; памятка
50-57	Учитель — эксперт. Проверяем запись по критериям памятки: 5 пунктов, где ставится балл. Ученик находит у себя, где потерял бы балл, и переписывает.	Памятка, образец записи
57-60	Итог и ДЗ. Вопрос: «По каким признакам ты выбираешь способ?» (дробь — ОДЗ; повторяется выражение — замена; степень три — группировка; нет c или b — неполное). Выдаём домашнюю карточку.	Домашняя карточка

Как подстроить под уровень

- **Трек А:** в блоке 12-27 разбираем задачи 1 и 4 целиком по диалогу; самостоятельно — задача 5 по шагам в тренажёре; ДЗ — задачи 1 и 3 из карточки.
- **Трек В:** план как есть; задача 4 решается учеником сразу, учитель только слушает.
- **Трек С:** вместо задач 1 и 4 берём 2 и 3; в блоке 37-50 — задача 3 без подсказок; добавить вопрос «Можно ли решить задачу 2 через замену $t = (x + 1)/(x - 1)$?» (получается $t + 1/t = 10/3$).

Домашнее задание

1. Домашняя карточка из 4 задач (№20), оформить полностью как на экзамене. Срок — к следующему занятию.
2. Интерактивный тест «Квадратные уравнения» (10 вопросов), результат записать на карточке. Цель — не меньше 8.
3. Тренажёр «новые числа каждый раз»: 10 задач, любые типы; записать, какие типы вызвали ошибки.

Следующее занятие

Первые 5 минут — три вопроса из опроса на прошлую тему (вопросы 4, 7, 13). Затем проверка ДЗ по ключевым точкам. Через неделю зачётный лист: уровень 1 обязателен, уровни 2 и 3 по треку. Если за уровень 1 меньше 4 баллов из 6, возвращаемся к правилам 2-5 и к пятиминутке.