

Прогрессии • задание 14 ОГЭ • теория

Печать: 2 листа А4. Лист 1 — теория и вопросы (ученику), лист 2 — ответы на вопросы (учителю).
Формулировки близки к школьному учебнику алгебры 9 класса.

1. Последовательности

Числовая последовательность — функция, заданная на множестве натуральных чисел. Её значения называют членами: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Число n — номер члена.

Способы задания: **формулой n -го члена** ($a_n = 3n - 2$); **рекуррентно** ($a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 3$); словами или перечислением первых членов.

2. Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d . Число d — **разность** прогрессии.

Формулы.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + d; \quad d = a_{n+1} - a_n \\a_n &= a_1 + (n - 1)d \\a_n &= (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2 \text{ (свойство)} \\S_n &= (a_1 + a_n) \cdot n : 2 \\S_n &= (2a_1 + (n - 1)d) \cdot n : 2\end{aligned}$$

Если даны два члена: $d = (a_m - a_k) : (m - k)$.
Любой член через известный: $a_m = a_k + (m - k)d$.

Рост и убывание. $d > 0$ — члены растут, $d < 0$ — убывают.

3. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q . Число q — **знаменатель** прогрессии.

Формулы.

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= b_n \cdot q; \quad q = b_{n+1} : b_n \\b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \\b_n^2 &= b_{n-1} \cdot b_{n+1} \text{ (свойство)} \\S_n &= b_1(q^n - 1) : (q - 1), \quad q \neq 1\end{aligned}$$

При $q < 0$ знаки членов чередуются: плюс, минус, плюс, минус.

4. Приёмы для задания 14

- **Первое:** определите вид: «на ... больше» — арифметическая, «в ... раз» или «на $p\%$ » — геометрическая.
- **Шаги.** От a_k до a_m ровно $m - k$ шагов. От a_1 до a_n — $n - 1$ шаг.
- **Сколько членов ... < 0.** Запишите $a_n < 0$, решите относительно n , возьмите наибольшее натуральное n (строгое неравенство: ноль не отрицательный).
- **Сумма без первого члена.** Найдите d , затем a_1 и последний член, потом формулу суммы.
- **Практика.** Ряды в зале, накопления «на столько-то больше» — арифметическая; бактерии, рост в k раз — геометрическая.

5. Типичные ошибки

- Степень или шаги n вместо $n - 1$.
- В формуле суммы арифметической прогрессии забыто деление на 2.
- Арифметическая и геометрическая перепутаны: d и q , «+» и «·».
- Потерян знак при отрицательных d или q .
- Члены прогрессии с номерами k и m : разность членов поделена не на $(m - k)$.

Вопросы для устного опроса

1. Что такое числовая последовательность? Назовите три способа её задания.
2. Последовательность задана формулой $a_n = 4n - 1$. Найдите a_5 и a_{10} .
3. Дайте определение арифметической прогрессии. Как найти её разность?
4. Арифметическая прогрессия 5; 9; 13; ... Чему равны d и a_6 ?
5. Запишите формулу n -го члена арифметической прогрессии. Почему в ней $(n - 1)$, а не n ?
6. Сформулируйте характеристическое свойство арифметической прогрессии. Найдите a_5 , если $a_4 = 11$, $a_6 = 17$.
7. Запишите две формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Когда удобна каждая?
8. Чему равна сумма натуральных чисел от 1 до 100?
9. Дайте определение геометрической прогрессии. Почему $q \neq 0$ и члены не равны нулю?
10. Геометрическая прогрессия 3; 6; 12; ... Чему равны q и b_5 ?
11. Запишите формулу n -го члена геометрической прогрессии. Почему степень $n - 1$?
12. Характеристическое свойство геометрической прогрессии. Все члены положительны, $b_2 = 4$, $b_4 = 16$. Найдите b_3 .
13. Запишите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Найдите $1 + 2 + 4 + 8 + 16$.
14. По каким словам условия отличить арифметическую прогрессию от геометрической?

Ответы на вопросы устного опроса (для учителя)

1. Функция, заданная на множестве натуральных чисел; значения — члены последовательности.
Способы: формулой n -го члена, рекуррентной формулой (каждый следующий член через предыдущие), словесным описанием или перечислением первых членов.
2. $a_5 = 4 \cdot 5 - 1 = 19$; $a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39$.
3. Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d . $d = a_{n+1} - a_n$.
4. $d = 9 - 5 = 4$; $a_6 = 5 + 5 \cdot 4 = 25$.
5. $a_n = a_1 + (n - 1)d$. От первого члена до n -го ровно $n - 1$ переход, на каждом прибавляется d .
6. Каждый член, кроме первого, равен среднему арифметическому соседних: $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2$. $a_5 = (11 + 17) : 2 = 14$.
7. $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$ — когда известен последний член; $S_n = (2a_1 + (n - 1)d) \cdot n : 2$ — когда известны первый член и разность.
8. Арифметическая прогрессия, $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$: $S = (1 + 100) \cdot 100 : 2 = 5050$.
9. Последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q . $q = b_{n+1} : b_n$; деление на нуль невозможно.
10. $q = 6 : 3 = 2$; $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$.
11. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. От первого члена до n -го $n - 1$ умножение на q .
12. Квадрат каждого члена равен произведению соседних: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. $b_3^2 = 4 \cdot 16 = 64$, $b_3 = 8$ (члены положительны).
13. $S_n = b_1(q^n - 1) : (q - 1)$, $q \neq 1$. Здесь $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 5$: $(32 - 1) : 1 = 31$.
14. Арифметическая: «на одно и то же число больше (меньше)». Геометрическая: «в одно и то же число раз больше (меньше)»; рост на $p\%$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1 + p : 100$.