

Разбор 5 задач повышенной сложности · прогрессии

Задание 14 ОГЭ. Печать: 3 страницы А4. Интерактивный тренажёр по этим же задачам — в материале 5.

Задача А. Арифметическая прогрессия: разность по двум членам и далёкий член

Условие. Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: $a_4 = 5$, $a_9 = -10$. Найдите a_{20} .

Что видим. Арифметическая прогрессия, даны два члена с номерами 4 и 9, надо найти член с номером 20. Первого члена нет, но он и не нужен: между a_4 и a_9 ровно 5 шагов, и каждый шаг прибавляет d .

Правило. Разность прогрессии: $d = (a_m - a_k) : (m - k)$. Любой член через соседний известный: $a_m = a_k + (m - k) \cdot d$.

Алгоритм. найти число шагов между известными номерами $\rightarrow$ найти $d \rightarrow$ посчитать число шагов до нужного номера $\rightarrow$ прибавить

Решение по шагам.

1. Между a_4 и a_9 шагов: $9 - 4 = 5$. Прогрессия изменилась на $a_9 - a_4 = -10 - 5 = -15$.
2. Разность: $d = -15 : 5 = -3$.
3. От a_9 до a_{20} шагов: $20 - 9 = 11$. Значит $a_{20} = a_9 + 11d = -10 + 11 \cdot (-3) = -10 - 33 = -43$.

Ответ: -43.

Проверка. Найдём $a_1 = a_4 - 3d = 5 + 9 = 14$. Тогда $a_{20} = 14 + 19 \cdot (-3) = 14 - 57 = -43$. Совпало.

Ловушка. Разность членов делят на разность номеров ($9 - 4 = 5$), а не на сам номер 9 и не на 4. Ещё одна частая ошибка: от a_9 до a_{20} шагов 11, а не 10 и не 12.

Задача В. Арифметическая прогрессия: сумма, когда первый член не дан

Условие. В арифметической прогрессии $a_6 = 14$, $a_{10} = 26$. Найдите сумму первых 15 её членов.

Что видим. Нужна сумма $a_1 \dots a_{15}$, но ни a_1 , ни a_{15} не даны. Даны два члена, из них находим d , потом a_1 и a_{15} , и только потом применяем формулу суммы.

Правило. Сумма первых n членов: $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$. Формула n -го члена: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Алгоритм. d по двум членам $\rightarrow$ первый член $\rightarrow$ последний член суммы $\rightarrow$ формула суммы

Решение по шагам.

1. $d = (a_{10} - a_6) : (10 - 6) = (26 - 14) : 4 = 3$.
2. $a_1 = a_6 - 5d = 14 - 15 = -1$ (от a_1 до a_6 пять шагов).
3. $a_{15} = a_1 + 14d = -1 + 42 = 41$.
4. $S_{15} = (-1 + 41) \cdot 15 : 2 = 40 \cdot 15 : 2 = 300$.

Ответ: 300.

Проверка. Формула $a_n = a_1 + (n - 1)d = 3n - 4$. Проверим: $a_6 = 18 - 4 = 14$, $a_{10} = 30 - 4 = 26$. Сумма $3(1 + 2 + \dots + 15) - 4 \cdot 15 = 3 \cdot 120 - 60 = 300$.

Ловушка. От a_1 до a_6 пять шагов, поэтому $a_1 = a_6 - 5d$, а не $a_6 - 6d$. И не забыть разделить на 2 в формуле суммы: без деления получится 600.

Задача С. Арифметическая прогрессия: сколько членов отрицательные

Условие. Сколько отрицательных членов в арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; -8,2; \dots$?

Что видим. Прогрессия возрастает (каждый следующий член больше на 0,2), начинается с $-8,6$. Члены отрицательны, пока не дойдём до нуля или до положительных чисел. Нужно найти последний номер, при котором $a_n < 0$.

Правило. $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Неравенство $a_n < 0$ решаем относительно n , номер n — натуральное число.

Алгоритм. найти $d \rightarrow$ записать $a_n < 0 \rightarrow$ решить неравенство $\rightarrow$ взять наибольшее натуральное n (строго меньше!)

Решение по шагам.

1. $d = -8,4 - (-8,6) = 0,2$; $a_1 = -8,6$.
2. $a_n = -8,6 + 0,2(n - 1) < 0$, значит $0,2(n - 1) < 8,6$, то есть $n - 1 < 43$, $n < 44$.
3. Наибольшее натуральное $n < 44$ — это 43. Отрицательных членов 43.

Ответ: 43.

Проверка. $a_{43} = -8,6 + 0,2 \cdot 42 = -8,6 + 8,4 = -0,2 < 0$. А $a_{44} = -8,6 + 0,2 \cdot 43 = 0$: ноль не отрицательный. Значит ответ 43.

Ловушка. Ответ 44 — частая ошибка: при $n = 44$ член равен нулю, а ноль не является отрицательным числом. Неравенство строгое: $n < 44$, а не $n \leq 44$. Ещё один промах: $n - 1 < 43$ и забыть прибавить единицу, получить 42.

Задача D. Геометрическая прогрессия: сумма первых членов, первый член отрицательный

Условие. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = -6$, $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите сумму первых пяти её членов.

Что видим. Рекуррентное задание: каждый следующий член вдвое больше предыдущего, значит $q = 2$. Первый член отрицательный, поэтому и сумма будет отрицательной.

Правило. $S_n = b_1(q^n - 1) : (q - 1)$, $q \neq 1$. Из условия $b_{n+1} = qb_n$ знаменатель читается сразу.

Алгоритм. прочитать q из рекуррентной формулы $\rightarrow$ посчитать $q^n \rightarrow$ подставить в формулу суммы

Решение по шагам.

1. Из условия $b_{n+1} = 2b_n$ получаем $q = 2$.
2. $q^5 = 32$, $q^5 - 1 = 31$, $q - 1 = 1$.
3. $S_5 = -6 \cdot 31 : 1 = -186$.

Ответ: -186.

Проверка. Выпишем члены: -6 ; -12 ; -24 ; -48 ; -96 . Сумма $-6 - 12 - 24 - 48 - 96 = -186$.

Ловушка. Знак: b_1 отрицателен, поэтому ответ отрицательный. Не путайте $q^5 = 32$ с $5q = 10$. И не берите в формулу b_5 вместо b_1 .

Задача E. Практическая задача на арифметическую прогрессию: места в зале

Условие. В зрительном зале 18 рядов: в первом ряду 14 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в зале?

Что видим. «На 2 места больше, чем в предыдущем» значит арифметическая прогрессия с $a_1 = 14$ и $d = 2$. Всего мест в зале — это сумма первых 18 членов.

Правило. $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$, $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Алгоритм. записать, что дано (a_1 , d , n) $\rightarrow$ найти последний ряд $\rightarrow$ применить формулу суммы

Решение по шагам.

1. $a_{18} = 14 + 17 \cdot 2 = 48$ (до 18-го ряда 17 шагов).
2. $S_{18} = (14 + 48) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$.

Ответ: 558.

Проверка. Вторая формула: $S_{18} = (2 \cdot 14 + 17 \cdot 2) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$. Совпало.

Ловушка. До 18-го ряда 17 прибавлений: $a_{18} = a_1 + 17d$, а не $18d$. Ещё ошибка: ответом записать число мест в последнем ряду (48) вместо суммы по всем рядам.