

Прогрессии • задание 14 ОГЭ • теория

Печать: 2 листа А4. Лист 1 — теория и вопросы (ученику), лист 2 — ответы на вопросы (учителю).
Формулировки близки к школьному учебнику алгебры 9 класса.

1. Последовательности

Числовая последовательность — функция, заданная на множестве натуральных чисел. Её значения называют членами: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Число n — номер члена.

Способы задания: **формулой n -го члена** ($a_n = 3n - 2$); **рекуррентно** ($a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + 3$); словами или перечислением первых членов.

2. Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d . Число d — **разность** прогрессии.

Формулы.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + d; \quad d = a_{n+1} - a_n \\a_n &= a_1 + (n - 1)d \\a_n &= (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2 \text{ (свойство)} \\S_n &= (a_1 + a_n) \cdot n : 2 \\S_n &= (2a_1 + (n - 1)d) \cdot n : 2\end{aligned}$$

Если даны два члена: $d = (a_m - a_k) : (m - k)$.
Любой член через известный: $a_m = a_k + (m - k)d$.

Рост и убывание. $d > 0$ — члены растут, $d < 0$ — убывают.

3. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q . Число q — **знаменатель** прогрессии.

Формулы.

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= b_n \cdot q; \quad q = b_{n+1} : b_n \\b_n &= b_1 \cdot q^{n-1} \\b_n^2 &= b_{n-1} \cdot b_{n+1} \text{ (свойство)} \\S_n &= b_1(q^n - 1) : (q - 1), \quad q \neq 1\end{aligned}$$

При $q < 0$ знаки членов чередуются: плюс, минус, плюс, минус.

4. Приёмы для задания 14

- **Первое:** определите вид: «на ... больше» — арифметическая, «в ... раз» или «на $p\%$ » — геометрическая.
- **Шаги.** От a_k до a_m ровно $m - k$ шагов. От a_1 до a_n — $n - 1$ шаг.
- **Сколько членов ... < 0.** Запишите $a_n < 0$, решите относительно n , возьмите наибольшее натуральное n (строгое неравенство: ноль не отрицательный).
- **Сумма без первого члена.** Найдите d , затем a_1 и последний член, потом формулу суммы.
- **Практика.** Ряды в зале, накопления «на столько-то больше» — арифметическая; бактерии, рост в k раз — геометрическая.

5. Типичные ошибки

- Степень или шаги n вместо $n - 1$.
- В формуле суммы арифметической прогрессии забыто деление на 2.
- Арифметическая и геометрическая перепутаны: d и q , «+» и «·».
- Потерян знак при отрицательных d или q .
- Члены прогрессии с номерами k и m : разность членов поделена не на $(m - k)$.

Вопросы для устного опроса

1. Что такое числовая последовательность? Назовите три способа её задания.
2. Последовательность задана формулой $a_n = 4n - 1$. Найдите a_5 и a_{10} .
3. Дайте определение арифметической прогрессии. Как найти её разность?
4. Арифметическая прогрессия 5; 9; 13; ... Чему равны d и a_6 ?
5. Запишите формулу n -го члена арифметической прогрессии. Почему в ней $(n - 1)$, а не n ?
6. Сформулируйте характеристическое свойство арифметической прогрессии. Найдите a_5 , если $a_4 = 11$, $a_6 = 17$.
7. Запишите две формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Когда удобна каждая?
8. Чему равна сумма натуральных чисел от 1 до 100?
9. Дайте определение геометрической прогрессии. Почему $q \neq 0$ и члены не равны нулю?
10. Геометрическая прогрессия 3; 6; 12; ... Чему равны q и b_5 ?
11. Запишите формулу n -го члена геометрической прогрессии. Почему степень $n - 1$?
12. Характеристическое свойство геометрической прогрессии. Все члены положительны, $b_2 = 4$, $b_4 = 16$. Найдите b_3 .
13. Запишите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Найдите $1 + 2 + 4 + 8 + 16$.
14. По каким словам условия отличить арифметическую прогрессию от геометрической?

Ответы на вопросы устного опроса (для учителя)

1. Функция, заданная на множестве натуральных чисел; значения — члены последовательности.
Способы: формулой n -го члена, рекуррентной формулой (каждый следующий член через предыдущие), словесным описанием или перечислением первых членов.
2. $a_5 = 4 \cdot 5 - 1 = 19$; $a_{10} = 4 \cdot 10 - 1 = 39$.
3. Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d . $d = a_{n+1} - a_n$.
4. $d = 9 - 5 = 4$; $a_6 = 5 + 5 \cdot 4 = 25$.
5. $a_n = a_1 + (n - 1)d$. От первого члена до n -го ровно $n - 1$ переход, на каждом прибавляется d .
6. Каждый член, кроме первого, равен среднему арифметическому соседних: $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2$. $a_5 = (11 + 17) : 2 = 14$.
7. $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$ — когда известен последний член; $S_n = (2a_1 + (n - 1)d) \cdot n : 2$ — когда известны первый член и разность.
8. Арифметическая прогрессия, $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$: $S = (1 + 100) \cdot 100 : 2 = 5050$.
9. Последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q . $q = b_{n+1} : b_n$; деление на нуль невозможно.
10. $q = 6 : 3 = 2$; $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$.
11. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. От первого члена до n -го $n - 1$ умножение на q .
12. Квадрат каждого члена равен произведению соседних: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. $b_3^2 = 4 \cdot 16 = 64$, $b_3 = 8$ (члены положительны).
13. $S_n = b_1(q^n - 1) : (q - 1)$, $q \neq 1$. Здесь $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 5$: $(32 - 1) : 1 = 31$.
14. Арифметическая: «на одно и то же число больше (меньше)». Геометрическая: «в одно и то же число раз больше (меньше)»; рост на $p\%$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 1 + p : 100$.

Печать: оба варианта на одном листе А4, разрезать по пунктиру. Ответы внизу отрезать до раздачи.

Вариант А

Фамилия, имя: 5–7 мин

1. Арифметическая прогрессия: $a_1 = -4$, $d = 5$.
Найдите a_0 .

[illegible]

Ответ: _____

2. Найдите a_{15} арифметической прогрессии 3; 7; 11; ...

[illegible]

Ответ:

3. Найдите сумму первых 12 членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5$, $d = 2$.

[illegible]

Ответ: _____

4. Практическая задача. В первом ряду зала 15 мест, а в каждом следующем на 3 места больше. Сколько всего мест в первых шести рядах?

[illegible]

Ответ:

5. Геометрическая прогрессия: $b_1 = -3$, $q = 2$.
Найдите сумму первых пяти её членов.

[illegible]

Ответ:

Вариант Б

Фамилия, имя: 5–7 мин

1. Арифметическая прогрессия: $a_1 = 6$, $d = -4$.
Найдите a_{11} .

[illegible]

Ответ: _____

2. Найдите a_{12} арифметической прогрессии 1; 6; 11;
...

[illegible]

Ответ:

3. Найдите сумму первых 10 членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 4$, $d = 3$.

[illegible]

Ответ: _____

4. Практическая задача. В начале опыта в колонии было 7 бактерий, каждый час их число увеличивается в 2 раза. Сколько бактерий будет через 5 часов?

[illegible]

Ответ:

5. Геометрическая прогрессия: $b_1 = 2$, $q = 3$.
Найдите сумму первых четырёх её членов.

[illegible]

Ответ:

Ответы (отрезать до раздачи).

Вариант А: 1) 36 ($a_9 = -4 + 8 \cdot 5$). 2) 59 ($d = 4, 3 + 14 \cdot 4$). 3) 192 ($((2 \cdot 5 + 11 \cdot 2) \cdot 12 : 2)$). 4) 135 ($a_6 = 15 + 5 \cdot 3 = 30, (15 + 30) \cdot 6 : 2$). 5) -93 ($-3 \cdot (32 - 1) : 1$).

Вариант Б: 1) -34 ($a_{11} = 6 + 10 \cdot (-4)$). 2) 56 ($d = 5, 1 + 11 \cdot 5$). 3) 175 ($((2 \cdot 4 + 9 \cdot 3) \cdot 10 : 2)$). 4) 224 ($7 \cdot 2^5$, степень 5: за 5 часов пять умножений). 5) 80 ($2 \cdot (81 - 1) : 2$).

Оценка: 1 балл за каждое из 5 заданий. «5» — 5 баллов; «4» — 4; «3» — 3; меньше трёх — повторить теорию. Пороги — предложение.

Разбор 5 задач повышенной сложности · прогрессии

Задание 14 ОГЭ. Печать: 3 страницы А4. Интерактивный тренажёр по этим же задачам — в материале 5.

Задача А. Арифметическая прогрессия: разность по двум членам и далёкий член

Условие. Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: $a_4 = 5$, $a_9 = -10$. Найдите a_{20} .

Что видим. Арифметическая прогрессия, даны два члена с номерами 4 и 9, надо найти член с номером 20. Первого члена нет, но он и не нужен: между a_4 и a_9 ровно 5 шагов, и каждый шаг прибавляет d .

Правило. Разность прогрессии: $d = (a_m - a_k) : (m - k)$. Любой член через соседний известный: $a_m = a_k + (m - k) \cdot d$.

Алгоритм. найти число шагов между известными номерами $\rightarrow$ найти $d \rightarrow$ посчитать число шагов до нужного номера $\rightarrow$ прибавить

Решение по шагам.

1. Между a_4 и a_9 шагов: $9 - 4 = 5$. Прогрессия изменилась на $a_9 - a_4 = -10 - 5 = -15$.
2. Разность: $d = -15 : 5 = -3$.
3. От a_9 до a_{20} шагов: $20 - 9 = 11$. Значит $a_{20} = a_9 + 11d = -10 + 11 \cdot (-3) = -10 - 33 = -43$.

Ответ: -43.

Проверка. Найдём $a_1 = a_4 - 3d = 5 + 9 = 14$. Тогда $a_{20} = 14 + 19 \cdot (-3) = 14 - 57 = -43$. Совпало.

Ловушка. Разность членов делят на разность номеров ($9 - 4 = 5$), а не на сам номер 9 и не на 4. Ещё одна частая ошибка: от a_9 до a_{20} шагов 11, а не 10 и не 12.

Задача В. Арифметическая прогрессия: сумма, когда первый член не дан

Условие. В арифметической прогрессии $a_6 = 14$, $a_{10} = 26$. Найдите сумму первых 15 её членов.

Что видим. Нужна сумма $a_1 \dots a_{15}$, но ни a_1 , ни a_{15} не даны. Даны два члена, из них находим d , потом a_1 и a_{15} , и только потом применяем формулу суммы.

Правило. Сумма первых n членов: $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$. Формула n -го члена: $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Алгоритм. d по двум членам $\rightarrow$ первый член $\rightarrow$ последний член суммы $\rightarrow$ формула суммы

Решение по шагам.

1. $d = (a_{10} - a_6) : (10 - 6) = (26 - 14) : 4 = 3$.
2. $a_1 = a_6 - 5d = 14 - 15 = -1$ (от a_1 до a_6 пять шагов).
3. $a_{15} = a_1 + 14d = -1 + 42 = 41$.
4. $S_{15} = (-1 + 41) \cdot 15 : 2 = 40 \cdot 15 : 2 = 300$.

Ответ: 300.

Проверка. Формула $a_n = a_1 + (n - 1)d = 3n - 4$. Проверим: $a_6 = 18 - 4 = 14$, $a_{10} = 30 - 4 = 26$. Сумма $3(1 + 2 + \dots + 15) - 4 \cdot 15 = 3 \cdot 120 - 60 = 300$.

Ловушка. От a_1 до a_6 пять шагов, поэтому $a_1 = a_6 - 5d$, а не $a_6 - 6d$. И не забыть разделить на 2 в формуле суммы: без деления получится 600.

Задача С. Арифметическая прогрессия: сколько членов отрицательные

Условие. Сколько отрицательных членов в арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; -8,2; \dots$?

Что видим. Прогрессия возрастает (каждый следующий член больше на 0,2), начинается с $-8,6$. Члены отрицательны, пока не дойдём до нуля или до положительных чисел. Нужно найти последний номер, при котором $a_n < 0$.

Правило. $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Неравенство $a_n < 0$ решаем относительно n , номер n — натуральное число.

Алгоритм. найти $d \rightarrow$ записать $a_n < 0 \rightarrow$ решить неравенство $\rightarrow$ взять наибольшее натуральное n (строго меньше!)

Решение по шагам.

1. $d = -8,4 - (-8,6) = 0,2$; $a_1 = -8,6$.
2. $a_n = -8,6 + 0,2(n - 1) < 0$, значит $0,2(n - 1) < 8,6$, то есть $n - 1 < 43$, $n < 44$.
3. Наибольшее натуральное $n < 44$ — это 43. Отрицательных членов 43.

Ответ: 43.

Проверка. $a_{43} = -8,6 + 0,2 \cdot 42 = -8,6 + 8,4 = -0,2 < 0$. А $a_{44} = -8,6 + 0,2 \cdot 43 = 0$: ноль не отрицательный. Значит ответ 43.

Ловушка. Ответ 44 — частая ошибка: при $n = 44$ член равен нулю, а ноль не является отрицательным числом. Неравенство строгое: $n < 44$, а не $n \leq 44$. Ещё один промах: $n - 1 < 43$ и забыть прибавить единицу, получить 42.

Задача D. Геометрическая прогрессия: сумма первых членов, первый член отрицательный

Условие. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = -6$, $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите сумму первых пяти её членов.

Что видим. Рекуррентное задание: каждый следующий член вдвое больше предыдущего, значит $q = 2$. Первый член отрицательный, поэтому и сумма будет отрицательной.

Правило. $S_n = b_1(q^n - 1) : (q - 1)$, $q \neq 1$. Из условия $b_{n+1} = qb_n$ знаменатель читается сразу.

Алгоритм. прочитать q из рекуррентной формулы $\rightarrow$ посчитать $q^n \rightarrow$ подставить в формулу суммы

Решение по шагам.

1. Из условия $b_{n+1} = 2b_n$ получаем $q = 2$.
2. $q^5 = 32$, $q^5 - 1 = 31$, $q - 1 = 1$.
3. $S_5 = -6 \cdot 31 : 1 = -186$.

Ответ: -186.

Проверка. Выпишем члены: -6 ; -12 ; -24 ; -48 ; -96 . Сумма $-6 - 12 - 24 - 48 - 96 = -186$.

Ловушка. Знак: b_1 отрицателен, поэтому ответ отрицательный. Не путайте $q^5 = 32$ с $5q = 10$. И не берите в формулу b_5 вместо b_1 .

Задача E. Практическая задача на арифметическую прогрессию: места в зале

Условие. В зрительном зале 18 рядов: в первом ряду 14 мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в зале?

Что видим. «На 2 места больше, чем в предыдущем» значит арифметическая прогрессия с $a_1 = 14$ и $d = 2$. Всего мест в зале — это сумма первых 18 членов.

Правило. $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$, $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Алгоритм. записать, что дано (a_1 , d , n) $\rightarrow$ найти последний ряд $\rightarrow$ применить формулу суммы

Решение по шагам.

1. $a_{18} = 14 + 17 \cdot 2 = 48$ (до 18-го ряда 17 шагов).
2. $S_{18} = (14 + 48) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$.

Ответ: 558.

Проверка. Вторая формула: $S_{18} = (2 \cdot 14 + 17 \cdot 2) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$. Совпало.

Ловушка. До 18-го ряда 17 прибавлений: $a_{18} = a_1 + 17d$, а не $18d$. Ещё ошибка: ответом записать число мест в последнем ряду (48) вместо суммы по всем рядам.

Памятка · прогрессии · задание 14

Один лист А4. Задание 14 — часть 1: за него 1 балл, проверяется только ответ, записанный в бланк №1.

Алгоритм решения

1. **Прочитать и определить вид.** «На ... больше» — арифметическая прогрессия (d). «В ... раз», «на $r\%$ » — геометрическая (q).
2. **Выписать, что дано и что найти:** a_1 , d (или q), номера членов, число членов n .
3. **Если не хватает a_1 и d (или q):** найти из двух данных членов. Арифметическая: $d = (a_m - a_k) : (m - k)$. Геометрическая: $q^{m-k} = b_m : b_k$.
4. **Посчитать шаги:** от номера k до номера m их $m - k$, от первого до n -го — $n - 1$.
5. **Подставить в формулу** n -го члена или суммы. Каждое действие отдельной строкой в черновике.
6. **Проверить:** выписать первые 3–4 члена и убедиться, что они подходят; сумму проверить второй формулой.
7. **Прочитать вопрос ещё раз:** нужен член, сумма или количество? Единицы измерения в бланк не пишутся.
8. **Записать в бланк №1** по правилам справа.

Формулы

	Арифметическая	Геометрическая
Шаг	$d = a_{n+1} - a_n$	$q = b_{n+1} : b_n$
n -й член	$a_1 + (n - 1)d$	$b_1 \cdot q^{n-1}$
Свойство	$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
Сумма	$(a_1 + a_n) \cdot n : 2$	$b_1(q^n - 1) : (q - 1)$

Как записать ответ в бланк №1

- Ответ — целое число или конечная десятичная дробь. В задании 14 обычно целое число.
- Одна цифра в одной клетке. Знак минус и запятая тоже занимают клетки: -43 это три клетки, $0,2$ это три клетки.
- Писать печатными цифрами, как в образце на бланке. Без пробелов, без слов «ответ», без единиц измерения, без знака равенства.
- Не писать номер члена вместо его значения: спрашивают a_{20} , а вы нашли n .
- Ошибку в бланке не зачёркивать поверх: исправляется только через блок «Замена ошибочных ответов» внизу бланка.
- Решение за задание 14 не оценивается, поэтому записи в черновике нужны только вам: аккуратная запись лучше всего ловит арифметическую ошибку.

Где теряют балл

Ошибка	Как не потерять
n вместо $n - 1$ в формуле	Посчитать шаги вслух: «от первого до 18-го — 17»
Нет деления на 2 в сумме	Проверить второй формулой
Потерян знак при $d < 0$ или $q < 0$	Выписать 3–4 члена, проверить знаки
«Сколько отрицательных» — взят член, равный нулю	Решить строго: $a_n < 0$, подставить границу
Дали номер, а просили значение (или наоборот)	Подчеркнуть в условии, что найти
Разность членов не поделена на $(m - k)$	Сначала число шагов, потом деление

Пять вопросов себе перед записью ответа: 1) это член, сумма или номер? 2) сколько шагов я сделал и почему столько? 3) не потерял ли знак? 4) проверил ли я хотя бы по трём первым членам? 5) вписан ли ответ без единиц и слов?

Зачётный лист · прогрессии · три уровня

Фамилия, имя: _____ Дата: _____ Время: 35-40 минут. Калькулятор не использовать.

Уровень 1 · Базовый (задания 1-5)

1. Арифметическая прогрессия: $a_1 = 9$, $d = -2$. Найдите a_8 .

Ответ: _____

2. Последовательность задана формулой $a_n = 6n - 7$. Найдите a_9 .

Ответ: _____

3. Найдите разность арифметической прогрессии 4; 9; 14; ...

Ответ: _____

4. Геометрическая прогрессия: $b_1 = 2$, $q = 5$. Найдите b_3 .

Ответ: _____

5. Геометрическая прогрессия: $b_1 = 3$, $q = -2$. Найдите b_4 .

Ответ: _____

Уровень 2 · Как на экзамене (задания 6-9)

6. В арифметической прогрессии $a_3 = -4$, $a_6 = 5$. Найдите a_{10} .

Ответ: _____

7. Найдите сумму первых 15 членов арифметической прогрессии, если $a_1 = -7$, $d = 2$.

Ответ:

8. Геометрическая прогрессия задана условиями: $b_1 = 5$, $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите сумму первых шести её членов.

Ответ: _____

9. В первом ряду зала 21 место, а в каждом следующем на 3 места больше. Сколько мест в девятом ряду?

Ответ:

Уровень 3 · Повышенный (задания 10-12)

10. В арифметической прогрессии $a_5 = 19$, $a_{12} = -2$. Найдите сумму первых 10 её членов.

Ответ:

11. Сколько членов арифметической прогрессии $3, 7; 4, 1; 4, 5; \dots$ меньше 20?

ОТВЕТ: _____

12. Все члены геометрической прогрессии положительны, $b_2 = 3$, $b_6 = 48$. Найдите b_4 .

Ответ: _____

Ответы (отрезать до раздачи).

Ответы (отрезать до раздачи).

1) -5 ; 2) 47 ; 3) 5 ; 4) 50 ; 5) -24 ; 6) 17 ; 7) 105 ; 8) 315 ; 9) 45 ; 10) 175 ; 11) 41 ; 12) 12 .

Ключевые точки. 6) $d = (5 - (-4)) : 3 = 3$, $a_{10} = 5 + 4 \cdot 3$. 7) $a_{15} = 21$, $(-7 + 21) \cdot 15 : 2$. 8) $q = 2$, $5 \cdot (64 - 1)$.

9) $a_9 = 21 + 8 \cdot 3$. 10) $d = (-2 - 19) : 7 = -3$, $a_1 = 31$, $a_{10} = 4$, $S = (31 + 4) \cdot 5$. 11) $d = 0,4$; $3,7 + 0,4(n - 1) < 20$, $n - 1 < 40,75$, $n = 41$. 12) $b_4^2 = b_2 \cdot b_6 = 144$, $b_4 = 12$.

Оценка (предложение, критерий ФИПИ не сверялись). 1 балл за задание. «5» — 11-12; «4» — 9-10; «3» — 6-8; меньше 6 — вернуться к теории и пятиминуткам. Уровень 3 можно сдавать по желанию.

Домашняя карточка · прогрессии · 4 задачи

Фамилия, имя: _____ Время: 20-25 минут. Каждое действие записывать отдельной строкой.
 Ответ вносить по правилам памятки.

1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: $a_2 = -3$, $a_7 = 17$. Найдите a_{15} .

Ответ: _____

2. Найдите сумму первых 20 членов арифметической прогрессии 4; 7; 10; ...

ОТВЕТ: _____

3. Сколько отрицательных членов в арифметической прогрессии $-5,4; -5,1; -4,8; \dots$?

Ответ: _____

4. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями: $b_1 = -4$, $b_{n+1} = 3b_n$. Найдите сумму первых четырёх её членов.

Ответ: _____

Ответы и ключевые точки для проверки (отрезать до раздачи).

1. **Ответ: 49.** $d = (17 - (-3)) : (7 - 2) = 4$. От a_7 до a_{15} восемь шагов: $a_{15} = 17 + 8 \cdot 4 = 49$. Ключевая точка: Разность делится на число шагов $7 - 2 = 5$. Шагов от седьмого до пятнадцатого члена 8. Проверка через первый член: $-7 + 14 \cdot 4 = 49$.
2. **Ответ: 650.** $d = 3$; $a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61$. $S_{20} = (4 + 61) \cdot 20 : 2 = 650$. Ключевая точка: До 20-го члена 19 шагов, не 20. Делить на 2 в формуле суммы. Проверка: $(2 \cdot 4 + 19 \cdot 3) \cdot 10 = 65 \cdot 10 = 650$.
3. **Ответ: 18.** $d = 0,3$. Решаем $-5,4 + 0,3(n - 1) < 0$: $n - 1 < 18$, $n < 19$. Наибольшее натуральное $n = 18$. Ключевая точка: При $n = 19$ член равен 0, он не отрицательный: строгое неравенство. Проверка: $a_{18} = -5,4 + 0,3 \cdot 17 = -0,3 < 0$, $a_{19} = 0$.
4. **Ответ: -160.** $q = 3$, $q^4 = 81$. $S_4 = -4 \cdot (81 - 1) : (3 - 1) = -4 \cdot 40 = -160$. Ключевая точка: Знак минус от первого члена. Проверка выпиской: $-4 - 12 - 36 - 108 = -160$.

Прогрессии (задание 14 ОГЭ)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель».

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, часть 1, задание 14: арифметическая и геометрическая прогрессии). Основные задачи А-Е и задачи для переноса.

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. В конце каждой задачи есть задача для самостоятельного решения. Печать: 2 колонки, шрифт 9 pt, экономия бумаги.

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Часть 1. Общий алгоритм (один раз для всех пяти задач)

Учитель: Открой любое задание 14. Что мы видим?

Ученик: Прогрессию: арифметическую или геометрическую. Даны первый член и разность или знаменатель, либо два члена, либо первые члены списком. Надо найти член, сумму или количество членов.

Учитель: Что в ответе?

Ученик: Одно число: целое или конечная десятичная дробь. В первой части проверяется только ответ, поэтому одна арифметическая ошибка стоит всего балла.

Учитель: Как отличить арифметическую прогрессию от геометрической?

Ученик: По тому, как получается следующий член. «На одно и то же число больше» значит, что прибавляем d : арифметическая. «В одно и то же число раз больше» значит, что умножаем на q : геометрическая. Рост на $p\%$ тоже геометрическая, там $q = 1 + p/100$.

Учитель: Откуда берётся формула n -го члена арифметической прогрессии?

Ученик: Пишу по шагам. $a_2 = a_1 + d$. $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$. $a_4 = a_1 + 3d$. Каждый раз коэффициент при d на единицу меньше номера. Значит $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Это же объясняет, почему шагов $n - 1$: от первого члена до n -го ровно $n - 1$ переход.

Учитель: А как найти d , если даны два члена, например a_4 и a_9 ?

Ученик: Между ними $9 - 4 = 5$ шагов, и на каждом прибавляется d . Значит $a_9 - a_4 = 5d$, откуда $d = (a_9 - a_4) : 5$. В общем виде $d = (a_m - a_k) : (m - k)$.

Учитель: Откуда сумма первых n членов?

Ученик: Запишу сумму дважды: $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и ещё раз в обратном порядке $S = a_n + \dots + a_2 + a_1$. Сложу столбиком: каждая пара равна $a_1 + a_n$, потому что при шаге вправо один член растёт на d , а другой уменьшается на d . Пар n , поэтому $2S = (a_1 + a_n) \cdot n$ и $S = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$. Деление на 2 появилось из-за того, что мы сложили два одинаковых набора.

Учитель: Теперь геометрическая. Откуда формула $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$?

Ученик: Так же по шагам. $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$. Степень на единицу меньше номера. Поэтому $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Учитель: А сумма?

Ученик: $S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$. Умножу на q : $qS = b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n$. Вычту первое из второго: почти всё сократится, останется $qS - S = b_1 q^n - b_1$.

Значит $S(q - 1) = b_1(q^n - 1)$ и $S = b_1(q^n - 1) : (q - 1)$ при $q \neq 1$.

Учитель: Зафиксируем алгоритм, он подходит к любому заданию 14:

1. Определи вид: арифметическая (прибавляем d) или геометрическая (умножаем на q).
2. Выпиши, что дано и что найти: a_1 , d (или b_1 , q), номера членов, число членов n .
3. Если не хватает a_1 и d : найди d по двум членам, $d = (a_m - a_k) : (m - k)$, затем a_1 при необходимости.
4. Посчитай шаги: от k до m их $m - k$; от первого члена до n -го их $n - 1$.
5. Подставь в формулу n -го члена или суммы. Каждое действие отдельной строкой.
6. Проверь: выпиши первые 3-4 члена; сумму проверь второй формулой.
7. Перечитай вопрос: член, сумма или номер? Запиши в бланк №1 только число: запятая, минус и цифры по клеткам, без единиц и слов.

Часть 2. Разбор задач А-Е

Задача А. Разность по двум членам и далёкий член

Условие: арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: $a_4 = 5$, $a_9 = -10$. Найдите a_{20} .

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Арифметическая прогрессия. Даны два члена с номерами 4 и 9, надо найти двадцатый. Первого члена нет.

Учитель: Он нужен?

Ученик: Не обязательно. Я могу идти от известного члена шагами по d . Сначала найду d .

Учитель: Откуда берётся d ?

Ученик: От четвёртого до девятого члена $9 - 4 = 5$ шагов. За них значение изменилось на $a_9 - a_4 = -10 - 5 = -15$. Значит $d = -15 : 5 = -3$.

Учитель: Теперь двадцатый член. Сколько шагов от девятого?

Ученик: $20 - 9 = 11$. $a_{20} = a_9 + 11d = -10 + 11 \cdot (-3) = -10 - 33 = -43$.

Учитель: Как проверить?

Ученик: Найду $a_1 = a_4 - 3d = 5 + 9 = 14$ и посчитаю $a_{20} = 14 + 19 \cdot (-3) = 14 - 57 = -43$. Совпало.

Учитель: Какая здесь ловушка?

Ученик: Делить разность членов надо на разность номеров, $9 - 4 = 5$, а не на девять и не на четыре. И от девятого члена до двадцатого шагов 11, не 10.

Ответ: -43.

Для самостоятельного решения (А'): $a_5 = 7$, $a_{11} = -5$. Найдите a_{20} . Ответ: -23.

Задача В. Сумма, когда первый член не дан

Условие: в арифметической прогрессии $a_6 = 14$, $a_{10} = 26$. Найдите сумму первых 15 её членов.

Учитель: Что требуется найти и что для этого нужно?

Ученик: Сумму 15 членов. Формула $S = (a_1 + a_{15}) \cdot 15 : 2$ требует первого и пятнадцатого члена, а у меня они не даны. Значит надо найти d , потом a_1 и a_{15} .

Учитель: Действуй.

Ученик: $d = (26 - 14) : (10 - 6) = 12 : 4 = 3$. Первый член: от a_1 до a_6 пять шагов, поэтому $a_1 = a_6 - 5d = 14 - 15 = -1$. Пятнадцатый: $a_{15} = a_1 + 14d = -1 + 42 = 41$.

Учитель: Сумма?

Ученик: $S_{15} = (-1 + 41) \cdot 15 : 2 = 40 \cdot 15 : 2 = 300$.

Учитель: Проверка?

Ученик: Формула члена $a_n = -1 + 3(n - 1) = 3n - 4$.
Проверяю $a_6 = 18 - 4 = 14$ и $a_{10} = 30 - 4 = 26$, обе
данные сходятся. Сумма $3 \cdot (1 + 2 + \dots + 15) - 4 \cdot 15 =$
 $3 \cdot 120 - 60 = 300$.

Учитель: Где можно потерять балл?

Ученик: От a_1 до a_6 пять шагов, а не шесть: ошибка
даст $a_1 = -4$. И нельзя забыть деление на 2: без него
получится 600.

Ответ: 300.

Для самостоятельного решения (В'): $a_4 = 10$, $a_9 =$
25. Найдите сумму первых 12 членов. Ответ: 210.

Задача С. Сколько членов отрицательные

Условие: сколько отрицательных членов в
арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; -8,2; \dots$?

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Прогрессия возрастает: каждый следующий
член больше на 0,2. Она начинается с $-8,6$ и когда-то
дойдёт до нуля. Мне нужно найти, сколько членов до
этого момента.

Учитель: Как записать условие «член
отрицательный»?

Ученик: $a_n < 0$. Формула $a_n = -8,6 + 0,2(n - 1)$.
Получаю неравенство $-8,6 + 0,2(n - 1) < 0$, то есть
 $0,2(n - 1) < 8,6$, откуда $n - 1 < 43$ и $n < 44$.

Учитель: Какой номер последний?

Ученик: Наибольшее натуральное n , меньшее 44, это
43. Отрицательных членов 43.

Учитель: Проверь границу.

Ученик: $a_{43} = -8,6 + 0,2 \cdot 42 = -8,6 + 8,4 = -0,2$, это
отрицательное число. $a_{44} = -8,6 + 0,2 \cdot 43 = 0$. Ноль не
отрицательный, поэтому 44-й член не считается.

Учитель: Какая здесь главная ловушка?

Ученик: Ответ 44 из-за нуля. Неравенство строгое.
Если бы спрашивали «сколько неположительных»,
ответ был бы 44.

Ответ: 43.

Для самостоятельного решения (С'): сколько
положительных членов в арифметической прогрессии
 $12,5; 12,1; 11,7; \dots$? Ответ: 32.

Задача D. Геометрическая прогрессия, **сумма первых членов**

Условие: геометрическая прогрессия (b_n) задана
условиями: $b_1 = -6$, $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите сумму первых
пяти её членов.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Рекуррентная запись: каждый следующий
член равен предыдущему, умноженному на 2. Значит
знаменатель $q = 2$. Первый член отрицательный.

Учитель: Какая формула нужна?

Ученик: Сумма: $S_5 = b_1(q^5 - 1) : (q - 1)$. Подставляю:
 $q^5 = 32$, $q^5 - 1 = 31$, $q - 1 = 1$. $S_5 = -6 \cdot 31 : 1 = -186$.

Учитель: Проверь без формулы.

Ученик: Выпишу члены: $-6; -12; -24; -48; -96$.
Сумма $-6 - 12 - 24 - 48 - 96 = -186$. Совпало.

Учитель: Что здесь легко перепутать?

Ученик: Знак: первый член отрицательный, поэтому
ответ отрицательный. И q^5 означает пять множителей
по 2, это 32, а не $5 \cdot 2 = 10$.

Ответ: -186 .

Для самостоятельного решения (D'): $b_1 = 5$, $b_{n+1} =$
 $-2b_n$. Найдите сумму первых четырёх членов. Ответ:
 -25 .

Задача Е. Практическая задача: места в **зале**

Условие: в зрительном зале 18 рядов: в первом ряду
14 мест, а в каждом следующем на 2 места больше,
чем в предыдущем. Сколько всего мест в зале?

Учитель: Какая здесь прогрессия?

Ученик: «На 2 места больше, чем в предыдущем»
значит прибавляем одно и то же число:
арифметическая, $a_1 = 14$, $d = 2$. Число рядов $n = 18$.
Всего мест в зале сумма первых 18 членов.

Учитель: Что считаем сначала?

Ученик: Последний ряд: $a_{18} = 14 + 17 \cdot 2 = 48$. До
восемнадцатого ряда 17 прибавлений.

Учитель: Сумма?

Ученик: $S_{18} = (14 + 48) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$.

Учитель: Проверь второй формулой.

Ученик: $S_{18} = (2 \cdot 14 + 17 \cdot 2) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$.
Совпало.

Учитель: Какие ловушки?

Ученик: Шагов 17, а не 18. И вопрос «сколько всего
мест»: ответ не 48 (число мест в последнем ряду), а
сумма по всем рядам.

Ответ: 558.

Для самостоятельного решения (Е'): в зале 20
рядов: в первом 10 мест, в каждом следующем на 3
больше. Сколько мест в зале? Ответ: 770.

План урока (индивидуальный, 60 **минут)**

- 0-5 мин. Вход и устный опрос.** 5 вопросов из
теории (рекомендую вопросы про формулу n -го
члена и шаги $n - 1$, про сумму арифметической
прогрессии, про отличие арифметической от
геометрической). Ошибки записать: они определяют
акценты урока.
- 5-15 мин. Теория.** Диалог «Часть 1»: ученик сам
объясняет, откуда берутся формула n -го члена,
сумма (пары) и сумма геометрической прогрессии.
Учитель фиксирует алгоритм, памятка остаётся
перед глазами.
- 15-25 мин. Разбор в диалоге.** Задача А: учитель
только задаёт вопросы, ученик вслух объясняет
«откуда это берётся».
- 25-40 мин. Самостоятельная работа.** Задачи В и
С. Ученик записывает каждое действие, учитель
молчит и фиксирует ошибки. Затем сверка с
разбором и ловушками.
- 40-50 мин. Пятиминутка.** Вариант А (5-7 минут),
проверка по ответам. Четыре и более баллов из
пяти: тренажёр с новыми числами; меньше:
повторить ловушки, где были ошибки.
- 50-57 мин. Работа над ошибками и бланк.**
Каждая ошибка: какое правило нарушено,
переписать верно, решить аналогичное.
Потренироваться записывать ответ в бланк №1
(минус и запятая занимают клетки, без слов).
- 57-60 мин. Итог и ДЗ.** Ученик называет три
ловушки и два признака, по которым определяет
вид прогрессии. Выдать домашнюю карточку.
Самооценка от 1 до 5: «могу объяснить это
другому».

Резерв: если урок идёт быстрее, разобрать D
(геометрическая) или Е (практическая). Если
медленнее, пятиминутку перенести на домашнюю
работу.

План домашней работы

1. **День 1.** Домашняя карточка: 4 задачи, 20-25 минут. Записывать каждое действие, ответ вносить в бланк по правилам памятки.
2. **Дни 2-3.** Тренажёр с новыми числами: по 5 заданий в день, брать типы, где были ошибки на уроке.
3. **Перед следующим уроком.** 3 вопроса устного опроса, ученик отвечает первым делом (5 минут).
4. **Следующий урок.** Проверка карточки по ключевым точкам из её конца (10 минут), затем зачётный лист (уровни 1 и 2) на оценку; уровень 3 по желанию.
5. **Через неделю.** Три задачи на прогрессии вперемешку с другой темой (проценты, уравнения, степени), чтобы проверить, что навык удержался.