

Трапеция (задания 17-19 и 23-25 ОГЭ)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель». Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, геометрия). Пять основных задач (1-5) совпадают с материалами «Разбор 5 задач» и «Тренажёр по шагам». В конце каждой задачи есть вопрос на перенос.

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. Печать: 2 колонки, шрифт 9 pt, экономия бумаги.

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Часть 1. Откуда берутся формулы

Учитель: Что такое трапеция?

Ученик: Четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные — основания, остальные — боковые стороны.

Учитель: Зачем в определении «две другие не параллельны»?

Ученик: Чтобы параллелограмм не считался трапецией. У параллелограмма обе пары сторон параллельны. Так сказано в учебнике Атанасяна, по нему и пишут решения.

Учитель: Что такое средняя линия и чему она равна?

Ученик: Отрезок, который соединяет середины боковых сторон. Он параллелен основаниям и равен их полусумме: $m = (a + b) / 2$.

Учитель: Откуда это берётся? Не верь формуле на слово.

Ученик: Пусть в трапеции ABCD основания AD и BC, N — середина CD, M — середина AB. Проведу прямую BN и продолжу до пересечения с прямой AD в точке E. Треугольники BCN и EDN равны: CN = ND, углы при N вертикальные, углы BCN и EDN накрест лежащие при BC || AD. Значит, BN = NE и DE = BC. Тогда MN — средняя линия треугольника ABE: она параллельна AE и равна половине AE. А AE = AD + DE = AD + BC. Поэтому MN = (AD + BC) / 2.

Учитель: Откуда формула площади?

Ученик: Диагональ делит трапецию на два треугольника. У одного основание AD и высота h, у другого основание BC и та же высота h, потому что BC || AD. $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = (a + b) / 2 \cdot h$. То есть средняя линия на высоту.

Учитель: Почему в равнобедренной трапеции высота отсекает именно (a - b) / 2?

Ученик: Опускаю две высоты из вершин меньшего основания. Получается прямоугольник со стороной b посередине и два прямоугольных треугольника по бокам. Треугольники равны по гипотенузе и катету, значит, их горизонтальные катеты равны. На них вместе приходится a - b, на каждый по (a - b) / 2.

Учитель: А почему для вписанной окружности суммы противоположных сторон равны?

Ученик: Из каждой вершины к окружности идут две касательные, и они равны. Если обозначить отрезки касательных x, y, z, t по вершинам, то AB + CD = (x + y) + (z + t), и BC + AD = (y + z) + (t + x). Обе суммы равны x + y + z + t. И высота равна диаметру, потому что окружность касается обоих оснований.

Часть 2. Общий алгоритм

Учитель: Открой любую задачу про трапецию во второй части. С чего начнёшь?

Ученик: С чертежа. Рисую трапецию ABCD, основания AD и BC, вношу все данные.

Учитель: Что ты определяешь потом?

Ученик: Вид трапеции: равнобедренная, прямоугольная или произвольная. Есть ли окружность. Какие данные: стороны, диагонали, площади.

Учитель: И как из этого выбирается построение?

Ученик: Равнобедренная или прямоугольная: две высоты. Даны обе боковые стороны: через вершину провожу прямую, параллельную боковой, и получаю треугольник со сторонами c, d и a - b. Даны диагонали и сумма оснований: сдвигаю диагональ, получаю треугольник со сторонами d₁, d₂ и a + b. Даны площади треугольников у диагоналей: подобие. Есть окружность: суммы сторон и h = 2r.

Учитель: Что в конце?

Ученик: Формула площади или нужной величины, подставляю числа. Проверяю: высота меньше боковой стороны, ответ отвечает на вопрос задачи. Записываю «Ответ».

Часть 3. Пять задач

Задача 1. Диагонали и площади треугольников (№23)

Условие. Диагонали AC и BD трапеции ABCD с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Известны два, у оснований: BOC и AOD. Нужны ещё два, боковые AOB и COD.

Учитель: Что связывает треугольники BOC и AOD?

Ученик: Они подобны по двум углам. Угол OBC равен углу ODA как накрест лежащие при BC || AD и секущей BD. Углы при точке O вертикальные.

Учитель: Что даёт подобие?

Ученик: Площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия. $k^2 = 4 : 9$, значит $k = BC : AD = 2 : 3$. Сходственные стороны пропорциональны, поэтому AO : OC = AD : BC = 3 : 2.

Учитель: Как найти площадь треугольника AOB?

Ученик: У треугольников AOB и BOC общая высота из вершины B на прямую AC. Значит, их площади относятся как основания AO и OC. $S(AOB) = S(BOC) \cdot AO / OC = 4 \cdot 3 / 2 = 6$.

Учитель: А площадь COD? Считать заново?

Ученик: Не надо. У треугольников ABD и ACD общее основание AD и равные высоты, потому что BC || AD. Площади равны. Вычитаю общий треугольник AOD и получаю $S(AOB) = S(COD) = 6$.

Учитель: Итог?

Ученик: $S = 4 + 9 + 6 + 6 = 25$.

Ответ: 25.

Учитель: Какая здесь ловушка?

Ученик: Сложить 4 и 9 и получить 13: забыть боковые треугольники.

Учитель: Вопрос на перенос. Площади BOC и AOD равны 9 и 16. Какая площадь трапеции?

Ученик: Боковые по $\sqrt{9 \cdot 16} = 12$ каждый, итого $9 + 16 + 12 + 12 = 49$. Это $(3 + 4)^2$. Но эту формулу на экзамене нужно вывести, как мы сделали.

Задача 2. Равнобедренная трапеция, диагональ перпендикулярна боковой стороне (№23)

Условие. В равнобедренной трапеции основания равны 7 и 25, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции.

Учитель: Что дано и что нужно?

Ученик: Трапеция ABCD, AD = 25, BC = 7, AB = CD, диагональ AC перпендикулярна CD. Нужна площадь. Основания есть, нужна высота.

Учитель: Откуда её взять?

Ученик: Проведу высоту CH. Она отсекает от большего основания отрезок HD = $(AD - BC) / 2 = (25 - 7) / 2 = 9$. Это следует из равнобедренности: две высоты и прямоугольник посередине.

Учитель: Где используем условие про перпендикулярность?

Ученик: Треугольник ACD прямоугольный, угол ACD равен 90° . CH — высота, проведённая из вершины прямого угла к гипотенузе AD. Для неё верно: квадрат катета равен произведению гипотенузы на проекцию катета на гипотенузу. $CD^2 = HD \cdot AD = 9 \cdot 25 = 225$, CD = 15.

Учитель: Теперь высота.

Ученик: Из прямоугольного треугольника CHD: $CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$.

Учитель: Площадь.

Ученик: $S = (25 + 7) / 2 \cdot 12 = 16 \cdot 12 = 192$.

Ответ: 192.

Учитель: Как проверить?

Ученик: $AH = 25 - 9 = 16$. Для высоты $CH^2 = AH \cdot HD$, то есть $16 \cdot 9 = 144$, а $12^2 = 144$. Сходится.

Учитель: Ловушка?

Ученик: Перепутать 9 и 16. HD равно полуразности оснований, а AH полусумме.

Учитель: Вопрос на перенос. У такой трапеции основания 14 и 50. Какова площадь?

Ученик: Это задача 2, увеличенная в 2 раза: HD = 18, $CD^2 = 18 \cdot 50 = 900$, CD = 30, $CH = \sqrt{900 - 324} = 24$, $S = 32 \cdot 24 = 768$. Площадь выросла в 4 раза: $192 \cdot 4 = 768$. Верно.

Задача 3. Известны боковые стороны (№23)

Условие. Основания трапеции равны 11 и 25, а боковые стороны равны 13 и 15. Найдите площадь трапеции.

Учитель: Что пробуешь первым?

Ученик: Опустить высоту и найти её из прямоугольного треугольника. Но тогда в нём две неизвестные: высота и проекция. Не хватает уравнения.

Учитель: Что можно сделать с боковой стороной?

Ученик: Сдвинуть её. Через вершину C провожу CE, параллельную AB, точка E на AD. Тогда ABCE — параллелограмм: BC || AE и AB || CE.

Учитель: Что мы знаем про параллелограмм?

Ученик: Противоположные стороны равны. AE = BC = 11 и CE = AB = 13. Отсюда ED = AD - AE = 25 - 11 = 14.

Учитель: Что получилось в треугольнике CED?

Ученик: Стороны CE = 13, CD = 15, ED = 14. Все три известны. Площадь по формуле Герона: полупериметр

$p = (13 + 14 + 15) / 2 = 21$, $S = \sqrt{(21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6)} = \sqrt{7056} = 84$.

Учитель: Откуда из этого высота трапеции?

Ученик: Высота CH треугольника CED, проведённая к стороне ED, и есть высота трапеции: расстояние между параллельными BC и AD. $CH = 2 \cdot 84 / 14 = 12$.

Учитель: Площадь?

Ученик: $S = (25 + 11) / 2 \cdot 12 = 18 \cdot 12 = 216$.

Ответ: 216.

Учитель: Есть ли второй способ?

Ученик: Да. Пусть x — проекция AB на AD, h — высота. Тогда $x^2 + h^2 = 169$ и $(14 - x)^2 + h^2 = 225$. Вычитаю: $196 - 28x = 56$, $x = 5$, $h = 12$. Тот же результат.

Учитель: Вопрос на перенос. Основания 12 и 33, боковые 13 и 20. Что изменится?

Ученик: ED = 33 - 12 = 21. Треугольник со сторонами 13, 20, 21: $p = 27$, $S = \sqrt{(27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6)} = 126$, высота $2 \cdot 126 / 21 = 12$, площадь трапеции $(12 + 33) / 2 \cdot 12 = 270$.

Задача 4. Прямоугольная трапеция и вписанная окружность (№23)

Условие. Около окружности радиуса 6 описана прямоугольная трапеция, большая боковая сторона которой равна 15. Найдите площадь трапеции.

Учитель: Что известно про высоту?

Ученик: Окружность касается обоих оснований, поэтому расстояние между ними равно диаметру. $h = 2r = 12$. В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона перпендикулярна основаниям, значит, AB = 12.

Учитель: Что нам нужно для площади?

Ученик: Сумма оснований. Основания по отдельности искать не надо.

Учитель: Как найти сумму?

Ученик: Трапеция описана около окружности, поэтому суммы противоположных сторон равны: $AD + BC = AB + CD = 12 + 15 = 27$.

Учитель: Площадь.

Ученик: $S = 27 / 2 \cdot 12 = 162$.

Ответ: 162.

Учитель: Проверим без формулы описанного четырёхугольника.

Ученик: Проекция CD на основание $\sqrt{(15^2 - 12^2)} = 9$, значит $AD - BC = 9$. Вместе с $AD + BC = 27$ получаю $AD = 18$, $BC = 9$. Периметр $18 + 9 + 12 + 15 = 54$, полупериметр 27, $S = 162$, $r = S / p = 162 / 27 = 6$. Радиус сошёлся.

Учитель: Ловушка?

Ученик: Принять высоту за радиус: тогда получится 81. Высота равна диаметру.

Учитель: Вопрос на перенос. Радиус 4, большая боковая сторона 10.

Ученик: $h = 8$, $AD + BC = 8 + 10 = 18$, $S = 18 / 2 \cdot 8 = 72$.

Задача 5. Доказательство площади треугольника (№24)

Условие. Точка M — середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ABM равна половине площади трапеции.

Учитель: Чисел нет. Как работать?

Ученик: Вводить буквы: AD = a, BC = b, высота h. Доказательство должно быть общим, не для одного чертежа.

Учитель: Как выразить площадь АВМ?

Ученик: Трапеция состоит из трёх треугольников: АВМ, ВСМ и АМД. Поэтому $S(ABM) = S - S(BCM) - S(AMD)$, где S — площадь трапеции.

Учитель: Что нужно знать про ВСМ и АМД?

Ученик: Их основания $BC = b$ и $AD = a$. Нужны высоты из вершины М.

Учитель: Как найти расстояние от М до AD?

Ученик: Провожу высоту СН трапеции и перпендикуляр МК к AD. $CH \parallel MK$, потому что оба перпендикулярны AD. М — середина CD, значит, по теореме Фалеса К — середина HD, и МК — средняя линия треугольника CHD. $MK = h / 2$.

Учитель: А до ВС?

Ученик: $BC \parallel AD$, расстояние между ними h . Поэтому расстояние от М до ВС равно $h - h / 2 = h / 2$.

Учитель: Теперь площади.

Ученик: $S(BCM) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h / 2 = bh / 4$. $S(AMD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h / 2 = ah / 4$. Сумма $(a + b)h / 4 = S / 2$, потому что $S = (a + b)h / 2$.

Учитель: Вывод.

Ученик: $S(ABM) = S - S / 2 = S / 2$. Что и требовалось доказать.

Учитель: Почему нельзя проверить на примере с числами?

Ученик: Это частный случай. Эксперт скажет, что доказано только для этих чисел, и поставит 0.

Учитель: Вопрос на перенос. Верно ли, что если М — середина основания ВС, то $S(AMD) = S / 2$?

Ученик: Неверно. Высота треугольника АМД из вершины М равна h , основание $AD = a$, $S(AMD) = \frac{1}{2}ah$. Это не половина $S = \frac{1}{2}(a + b)h$, если $a \neq b$. Половиной площадь АМД будет только при $a = b$, то есть для параллелограмма.

Часть 4. Как записать так, чтобы эксперт не снял баллы

Учитель: Что эксперт не оценивает?

Ученик: Красоту чертежа, красивые «Дано / Найти», рациональность способа, лишние рассуждения, описки вроде пропущенного значка градуса.

Учитель: Из-за чего теряют баллы?

Ученик: Вычислительная ошибка при верном ходе — 1 балл. Ложное утверждение, например «высота делит основание пополам», или шаг без обоснования — это уже риск нуля. В доказательстве нельзя опираться на чертёж или на числа.

Учитель: Что можно использовать без доказательства?

Ученик: Любые факты из учебников: формулу площади трапеции, среднюю линию, теорему Пифагора, подобие треугольников, формулу Герона. Нестандартные формулы, такие как $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$, нужно вывести по ходу.

Учитель: Что записываешь в конце?

Ученик: «Ответ: ...». В №23 ответ — число, единицы не обязательны. В №24 — слова «что и требовалось доказать».

Где мы в теме: разобрали → решай тренажёр по шагам → потом тренажёр с новыми числами → зачётный лист → домашняя карточка.