

Смеси (задание 21)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель», план урока и домашнее задание

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, часть 2, задание 21, средний уровень).

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи — похожая для самостоятельного решения (ответы в конце файла).

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Задачи разбора: 1. Выпаривание. 2. Смесь двух растворов. 3. Переливание. 4. Два условия, система. 5. Сплавы.

Задача 1. Выпаривание

Условие. Имеется 50 кг 16%-ного раствора соли. Сколько килограммов воды нужно выпарить, чтобы концентрация соли стала 25%?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Прочитай условие. Что мы видим?

Ученик: Задача на растворы, задание 21. Был раствор 50 кг, в нём 16 процентов соли. Воду выпаривают, и соли должно стать 25 процентов. Надо найти, сколько воды выпарили.

Учитель: Что в этом условии легко понять неверно?

Ученик: Можно найти массу нового раствора и записать её в ответ. А спрашивают про воду.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что такое концентрация вещества в растворе?

Ученик: Это отношение массы вещества к массе всего раствора. Можно в процентах.

Учитель: Верно. Как из неё найти массу вещества?

Ученик: Массу раствора умножить на концентрацию, переведённую в десятичную дробь.

Учитель: Что происходит с массой соли, когда воду выпаривают?

Ученик: Ничего. Уходит только вода, соль остаётся.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Назови шаги решения до того, как начнём считать.

Ученик: Найти, сколько соли в исходном растворе. Обозначить массу нового раствора. Приравнять: соли в новом растворе столько же. Найти массу нового раствора. Вычесть из прежней массы, чтобы узнать воду.

Учитель: Зафиксируем так:

1. Найти массу вещества: масса раствора · концентрация.
2. Обозначить неизвестное (масса нового раствора или масса воды).
3. Записать уравнение: масса вещества не меняется.
4. Решить уравнение.
5. Ответить на заданный вопрос и проверить.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Сколько соли в исходном растворе?

Ученик: 50 умножить на 0,16. Это 8 килограммов.

Учитель: Шаг 2. Что обозначим за неизвестное и какие у него ограничения?

Ученик: Пусть m килограммов — масса нового раствора. Она меньше 50, потому что воду убрали, и больше 0.

Учитель: Шаг 3. Сколько соли в новом растворе, если его масса m ?

Ученик: 0,25 умножить на m .

Учитель: Какое уравнение получится?

Ученик: $0,25m$ равно 8, потому что соли столько же, сколько было.

Если ученик ответит: « $0,25m = 50$ ».

Учитель: Что стоит в правой части: масса соли или масса раствора?

Учитель: Шаг 4. Реши уравнение.

Ученик: m равно 8 делить на 0,25. Это 32.

Учитель: Шаг 5. Что получилось: масса воды или масса нового раствора?

Ученик: Масса нового раствора. Воды выпарили 50 минус 32, это 18 килограммов.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверить?

Ученик: В 32 килограммах раствора 8 килограммов соли. 8 делить на 32 это 0,25, то есть 25 процентов. Подходит.

Учитель: Как записать ответ в бланк?

Ученик: Только число: 18. Единицы в бланк не пишут.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты в следующий раз узнаешь такую задачу?

Ученик: Слова «выпарить» или «добавили воды», нет другого раствора. Сохраняется масса вещества.

Учитель: Реши самостоятельно: имеется 60 кг 10%-ного раствора соли. Сколько килограммов воды нужно выпарить, чтобы концентрация соли стала 15%?

Задача 2. Смесь двух растворов

Условие. Смешали 30%-ный и 50%-ный растворы кислоты и получили 600 г 42%-ного раствора. Сколько граммов 50%-ного раствора взяли?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Смешали два раствора кислоты, 30 и 50 процентов. Получили 600 граммов с 42 процентами. Спрашивают массу 50%-ного раствора.

Учитель: Что здесь ловушка?

Ученик: Если я обозначу x массу 30%-ного, то x не будет ответом. Ответ — это 600 минус x .

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что складывается, когда растворы смешивают?

Ученик: Массы растворов и массы вещества.

Учитель: А что складывать нельзя?

Ученик: Концентрации. 30 плюс 50 не равно 42.

Учитель: Почему?

Ученик: Концентрация — это доля, она зависит от массы раствора. Сначала надо найти массу вещества, потом делить.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Как будем решать?

Ученик: Обозначить массу одного раствора через x , второй выразить через x . Записать, сколько кислоты в каждом. Приравнять сумму к кислоте в смеси. Решить. Ответить про нужный раствор.

Учитель: Фиксируем:

1. Пусть x — масса первого раствора, $(M - x)$ — масса второго.
2. Масса вещества в каждом: масса $\cdot$ концентрация.
3. Уравнение: вещество первого + вещество второго = вещество в смеси.
4. Решить, отобрать корень.
5. Ответить на заданный вопрос.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Что обозначим за x ?

Ученик: Пусть x граммов — масса 30%-ного раствора. Тогда 50%-ного будет 600 минус x граммов. x больше 0 и меньше 600.

Учитель: Шаг 2. Сколько кислоты в каждом растворе?

Ученик: В первом $0,3x$. Во втором $0,5$ умножить на $(600 \text{ минус } x)$.

Учитель: Сколько кислоты должно быть в смеси?

Ученик: $0,42$ умножить на 600. Это 252 грамма.

Учитель: Шаг 3. Составь уравнение.

Ученик: $0,3x$ плюс $0,5$ на $(600 \text{ минус } x)$ равно 252.

Если ученик ответит: « $0,3 + 0,5 = 0,42$ ».

Учитель: Что мы складываем в этой записи: массы вещества или концентрации?

Учитель: Шаг 4. Решай.

Ученик: Раскрываю скобки: $0,3x$ плюс 300 минус $0,5x$ равно 252. Получается $300 \text{ минус } 0,2x$ равно 252. $0,2x$ равно 48. x равно 240.

Учитель: Что мы нашли?

Ученик: Массу 30%-ного раствора. Нужен 50%-ный: 600 минус 240 равно 360 граммов.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверить?

Ученик: Кислоты в 240 граммах 30%-ного раствора 72 грамма, в 360 граммах 50%-ного 180 граммов. Вместе 252. И 42 процента от 600 тоже 252.

Учитель: Есть ли быстрая проверка без уравнения?

Ученик: Правило креста. Из большей концентрации вычитаем нужную: 50 минус 42 это 8. Из нужной вычитаем меньшую: 42 минус 30 это 12. Масса 30%-ного относится к массе 50%-ного как 8 к 12, то есть 2 к 3. И 240 к 360 тоже 2 к 3.

Учитель: Верно. А в записи решения для эксперта что пишем?

Ученик: Уравнение. Крест только для проверки. Ответ: 360.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу?

Ученик: Слова «смешали» и два раствора. Известна масса смеси и её концентрация. Уравнение по веществу.

Учитель: Реши самостоятельно: смешали 20%-ный и 40%-ный растворы и получили 400 г 35%-ного раствора. Сколько граммов 20%-ного раствора взяли?

Задача 3. Переливание

Условие. Сосуд вместимостью 10 л наполнен 80%-ным раствором кислоты. Из сосуда отлили x л раствора и долили x л воды, затем эту операцию повторили. В результате получился 20%-ный раствор. Найдите x . Ответ дайте в литрах.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Сосуд на 10 литров, в нём 80%-ный раствор. Отливают x литров, доливают x литров воды, и так два раза. В конце 20 процентов. Надо найти x .

Учитель: Какие ограничения на x ты видишь сразу?

Ученик: x больше 0 и меньше 10, ведь нельзя отлить больше, чем в сосуде.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что происходит с концентрацией, когда из сосуда отлили часть раствора?

Ученик: Ничего не меняется. Раствор в сосуде тот же, просто его меньше.

Учитель: А с массой кислоты?

Ученик: Её тоже стало меньше, пропорционально объёму. Осталось $(10 - x)$ из 10 частей.

Учитель: Что происходит, когда доливают воду?

Ученик: Кислоты не прибавляется, а объём опять 10 литров. Значит концентрация уменьшается.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Назови шаги.

Ученик: Посмотреть, во сколько раз меняется концентрация за один цикл. Возвести в степень по числу циклов. Приравнять к конечной концентрации. Решить, отобрать корень.

Учитель: Фиксируем:

1. За один цикл концентрация умножается на $(1 - x/V)$.
2. После n циклов: $c \cdot (1 - x/V)^n$.
3. Приравнять к конечной концентрации.
4. Решить уравнение, отобрать корень по смыслу ($0 < x < V$).
5. Проверить подстановкой, записать ответ.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Выведи, на что умножается концентрация за один цикл.

Ученик: Кислоты после отлива 0,8 умножить на $(10 - x)$. Объём после доливания 10. Концентрация равна 0,8 на $(10 - x)$, делить на 10. Это 0,8 на $(1 - x/10)$.

Учитель: Шаг 2. Что будет после второго цикла?

Ученик: Ещё раз умножаем на $(1 - x/10)$. Получается 0,8 на $(1 - x/10)$ в квадрате.

Если ученик ответит: « $0,8(1 - 2x/10)$ ».

Учитель: Во второй раз ты отливаешь x литров чего: исходного раствора или уже разбавленного?

Учитель: Шаг 3. Какое уравнение?

Ученик: 0,8 на (1 минус $x/10$) в квадрате равно 0,2.

Учитель: Шаг 4. Реши.

Ученик: Делю на 0,8: (1 минус $x/10$) в квадрате равно 0,25. Тогда 1 минус $x/10$ равно 0,5 или минус 0,5.

Учитель: Что получится для x в каждом случае?

Ученик: Если 0,5, то x равно 5. Если минус 0,5, то $x/10$ равно 1,5 и x равно 15.

Учитель: Какой корень подходит?

Ученик: Только 5. 15 больше десяти, столько в сосуде нет.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверить?

Ученик: После первого цикла 0,8 умножить на 0,5 это 0,4. После второго 0,4 на 0,5 это 0,2. Сходится с условием.

Учитель: Как записать ответ?

Ученик: 5, без единиц.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу?

Ученик: Слова «отлили и долили воды», «операцию повторили». Есть объём сосуда. Множитель в степени.

Учитель: Реши самостоятельно: сосуд вместимостью 20 л наполнен 64%-ным раствором соли. Из него отлили x л и долили x л воды, затем операцию повторили, получился 36%-ный раствор. Найдите x .

Задача 4. Два условия, система

Условие. Имеются два сосуда. Первый содержит 20 кг, а второй — 30 кг раствора кислоты разной концентрации. Если их слить вместе, получится раствор, содержащий 52% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, получится раствор, содержащий 55% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Два сосуда с растворами кислоты, концентрации не известны. Есть два условия: слить всё и слить равные массы. Нужна масса кислоты в первом сосуде.

Учитель: Что нам неизвестно?

Ученик: Сколько кислоты в каждом сосуде. Значит неизвестных два.

Учитель: Что тогда будем составлять?

Ученик: Систему из двух уравнений.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как выразить концентрацию раствора в сосуде, если в нём x кг кислоты и 20 кг раствора?

Ученик: x делить на 20.

Учитель: Что будет с массой кислоты, если слить всё содержимое двух сосудов?

Ученик: Кислоты станет x плюс y , а масса раствора 20 плюс 30, то есть 50.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какие шаги?

Ученик: Обозначить массы кислоты в сосудах. Записать первое условие. Записать второе. Решить систему. Ответить на вопрос.

Учитель: Фиксируем:

1. Пусть x кг — кислоты в первом сосуде, y кг — во втором. Концентрации x/m_1 и y/m_2 .
2. Первое условие (слили всё): $x + y = c_1 \cdot (m_1 + m_2)$.
3. Второе условие (равные массы m): $m \cdot x/m_1 + m \cdot y/m_2 = c_2 \cdot 2m$, масса m сокращается.
4. Решить систему.
5. Проверить, ответить на заданный вопрос.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Что за x и y , какие ограничения?

Ученик: x килограммов кислоты в первом сосуде, y во втором. Оба больше нуля. x меньше 20, y меньше 30.

Учитель: Шаг 2. Запиши первое условие.

Ученик: Слили всё, получили 50 килограммов раствора, в нём 52 процента кислоты. 0,52 на 50 это 26. Значит x плюс y равно 26.

Учитель: Шаг 3. Сколько кислоты в m кг раствора из первого сосуда?

Ученик: Концентрация первого x делить на 20. Кислоты m на x делить на 20.

Учитель: А из второго?

Ученик: m на y делить на 30.

Учитель: Какова масса смеси?

Ученик: $2m$, ведь взяли по m килограммов каждого раствора.

Учитель: Какое уравнение получится?

Ученик: Кислоты в смеси 55 процентов от $2m$. m на $x/20$ плюс m на $y/30$ равно 0,55 на $2m$. Делю на m : $x/20$ плюс $y/30$ равно 1,1.

Если ученик ответит: « $x + y = 0,55 \cdot 50$ ».

Учитель: Какие массы растворов берём во втором условии: всё содержимое сосудов или равные части?

Учитель: Как упростить уравнение с дробями?

Ученик: Умножить на 60, общее кратное 20 и 30. Получается $3x$ плюс $2y$ равно 66.

Учитель: Шаг 4. Реши систему.

Ученик: Из первого y равно 26 минус x . Подставляю: $3x$ плюс 52 минус $2x$ равно 66. Значит x равно 14, а y равно 12.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверить?

Ученик: Концентрация первого 14 делить на 20 это 0,7. Второго 12 делить на 30 это 0,4. Среднее равно 0,55. Всего кислоты 26 из 50, это 52 процента. Всё сходится.

Учитель: Что записываем в ответ?

Ученик: Массу кислоты в первом сосуде: 14. Не концентрацию и не y .

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу?

Ученик: Два сосуда, концентрации не даны, два условия: «слили всё» и «равные массы». Нужна система.

Учитель: Реши самостоятельно: в первом сосуде 10 кг, во втором 30 кг раствора кислоты разной концентрации. Если растворы слить, получится 65%-ный раствор, а если слить равные массы, то 60%-ный. Сколько килограммов кислоты во втором сосуде?

Задача 5. Сплавы

Условие. Имеются два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй — 40% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 300 кг, содержащий 34% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Сплавы, как растворы. Два сплава с никелем, 10 и 40 процентов. Третий весит 300 килограммов, в нём 34 процента никеля. Надо найти, на сколько первый легче второго.

Учитель: В чём ловушка?

Ученик: Можно найти массу первого сплава и записать в ответ. А нужна разность.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что происходит с металлом при сплавлении?

Ученик: Он весь переходит в третий сплав. Масса третьего сплава равна сумме масс двух первых.

Учитель: Как найти массу никеля в сплаве?

Ученик: Массу сплава умножить на долю никеля, переведённую в десятичную дробь.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какие шаги?

Ученик: Обозначить массы двух сплавов x и y . Составить уравнение по массе сплавов. Составить уравнение по никелю. Решить систему. Найти то, что спрашивают.

Учитель: Фиксируем:

1. Пусть x кг и y кг — массы первого и второго сплавов.

2. $x + y$ = масса третьего сплава.

3. Вещество: $c_1x + c_2y = c_3 \cdot$ (масса третьего).
4. Решить систему.
5. Найти величину из вопроса (разность, масса третьего или x), проверить.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Шаг 1. Что обозначим?
Ученик: Пусть x килограммов — первый сплав, y килограммов — второй. Оба больше нуля.
Учитель: Шаг 2. Первое уравнение?
Ученик: x плюс y равно 300.
Учитель: Шаг 3. Сколько никеля в третьем сплаве?
Ученик: 0,34 умножить на 300. Это 102 килограмма.
Учитель: Второе уравнение?
Ученик: 0,1 x плюс 0,4 y равно 102.

Если ученик ответит: «0,1 x + 0,4 y = 0,34».
Учитель: Что стоит справа: масса никеля в килограммах или доля?

Учитель: Шаг 4. Реши систему.
Ученик: Из первого y равно 300 минус x . Подставляю: 0,1 x плюс 120 минус 0,4 x равно 102. Получается минус 0,3 x равно минус 18. x равно 60. Тогда y равно 240.
Учитель: Шаг 5. Что спрашивают в задаче?
Ученик: На сколько первый меньше второго. 240 минус 60 это 180 килограммов.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверить?
Ученик: Никеля в первом 6 килограммов, во втором 96. Вместе 102. И 34 процента от 300 тоже 102. Сходится.
Учитель: Как записать ответ?
Ученик: 180.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу?
Ученик: «Сплав», известна масса третьего, спрашивают про массы исходных. Система из массы и вещества.
Учитель: Реши самостоятельно: первый сплав содержит 20% олова, второй — 50% олова. Из них получили 240 кг сплава с 38% олова. На сколько килограммов масса второго сплава больше массы первого?

Ответы на задачи для самостоятельного решения (этап 6)

1. **20 кг.** Соли $60 \cdot 0,1 = 6$ кг; новый раствор $6 : 0,15 = 40$ кг; выпарили $60 - 40 = 20$ кг.
2. **100 г.** $0,2x + 0,4(400 - x) = 0,35 \cdot 400$; $160 - 0,2x = 140$; $x = 100$. Проверка: $20 + 120 = 140$.
3. **5 л.** $0,64(1 - x/20)^2 = 0,36$; $(1 - x/20)^2 = 0,5625$; $1 - x/20 = 0,75$; $x = 5$. Корень $x = 35$ не подходит, так как $35 > 20$.
4. **21 кг.** $x + y = 0,65 \cdot 40 = 26$; $x/10 + y/30 = 2 \cdot 0,6 = 1,2$, то есть $3x + y = 36$. Вычитаем: $2x = 10$; $x = 5$, $y = 21$.
5. **48 кг.** $x + y = 240$; $0,2x + 0,5y = 0,38 \cdot 240 = 91,2$; $0,2x + 120 - 0,5x = 91,2$; $x = 96$, $y = 144$; $144 - 96 = 48$.

План урока и домашнего задания

Формат: индивидуальное занятие, 60 минут, 9 класс, подготовка к ОГЭ.
Цель: ученик называет алгоритм для задач на смеси, заполняет таблицу «масса · доля = масса вещества», составляет уравнение по веществу и оформляет одну задачу на 2 балла.

Ход урока

Минуты	Что делаем	Материал
0-5	Устный опрос: вопросы 3, 6, 7, 9, 13. Ошибки записываем, не поправляем.	Теория и опрос
5-12	Открытие: смешали 200 г 10%-ного и 300 г 20%-ного растворов, будет ли 15%? Прогноз, затем таблица: 16%. Вывод: складывают массы вещества, а не концентрации.	Теория, правила 2-3
12-27	Разбор вслух задач 1 (выпаривание) и 5 (сплавы) по этапам диалога. Алгоритм ученик называет до счёта.	Этот файл; разбор 5 задач

Минуты	Что делаем	Материал
27-37	Пятиминутка (вариант А или Б), 7 минут без подсказок, затем сверка.	Карточки-пятиминутки
37-50	Самостоятельно: задача 3 или 4 в интерактивном тренажёре по шагам, затем запись на листе как на экзамене.	Тренажёр; памятка
50-57	Учитель — эксперт: проверка записи по критериям памятки, ученик находит потерянный балл и переписывает.	Памятка
57-60	Итог: «по каким признакам узнаёшь задачу на смеси?». Возвращаемся к вопросу из опроса, где была ошибка. Выдаём ДЗ.	Домашняя карточка

Подстройка под уровень

- **Трек А:** в блоке 12-27 разбираем задачи 1 и 2 целиком; самостоятельно — задача 1 в тренажёре; ДЗ — задачи 1 и 2.
- **Трек В:** план как есть; задачу 5 ученик решает сам, учитель слушает.
- **Трек С:** вместо задач 1 и 5 берём 3 и 4; в блоке 37-50 — задача 4 без подсказок; вопрос «Можно ли решить быстрее?» (правило креста для задачи 2).

Домашнее задание

1. Домашняя карточка из 4 задач (задание 21), оформить полностью как на экзамене.
2. Интерактивный тест «Смеси» (10 вопросов), цель — не меньше 8.
3. Тренажёр «новые числа каждый раз»: 10 задач, записать, какие типы вызвали ошибки.

Следующее занятие

Первые 5 минут: вопросы 8, 10, 12 из опроса. Затем проверка ДЗ по ключевым точкам. Через неделю зачётный лист: уровень 1 обязателен, уровни 2 и 3 по треку. Если за уровень 1 меньше 4 баллов, возвращаемся к правилам 1-3 и к пятиминутке.