

Прогрессии (задание 14 ОГЭ)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель».

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, часть 1, задание 14: арифметическая и геометрическая прогрессии). Основные задачи А-Е и задачи для переноса.

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. В конце каждой задачи есть задача для самостоятельного решения. Печать: 2 колонки, шрифт 9 pt, экономия бумаги.

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Часть 1. Общий алгоритм (один раз для всех пяти задач)

Учитель: Открой любое задание 14. Что мы видим?

Ученик: Прогрессию: арифметическую или геометрическую. Даны первый член и разность или знаменатель, либо два члена, либо первые члены списком. Надо найти член, сумму или количество членов.

Учитель: Что в ответе?

Ученик: Одно число: целое или конечная десятичная дробь. В первой части проверяется только ответ, поэтому одна арифметическая ошибка стоит всего балла.

Учитель: Как отличить арифметическую прогрессию от геометрической?

Ученик: По тому, как получается следующий член. «На одно и то же число больше» значит, что прибавляем d : арифметическая. «В одно и то же число раз больше» значит, что умножаем на q : геометрическая. Рост на $p\%$ тоже геометрическая, там $q = 1 + p/100$.

Учитель: Откуда берётся формула n -го члена арифметической прогрессии?

Ученик: Пишу по шагам. $a_2 = a_1 + d$. $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$. $a_4 = a_1 + 3d$. Каждый раз коэффициент при d на единицу меньше номера. Значит $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Это же объясняет, почему шагов $n - 1$: от первого члена до n -го ровно $n - 1$ переход.

Учитель: А как найти d , если даны два члена, например a_4 и a_9 ?

Ученик: Между ними $9 - 4 = 5$ шагов, и на каждом прибавляется d . Значит $a_9 - a_4 = 5d$, откуда $d = (a_9 - a_4) : 5$. В общем виде $d = (a_m - a_k) : (m - k)$.

Учитель: Откуда сумма первых n членов?

Ученик: Запишу сумму дважды: $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и ещё раз в обратном порядке $S = a_n + \dots + a_2 + a_1$. Сложу столбиком: каждая пара равна $a_1 + a_n$, потому что при шаге вправо один член растёт на d , а другой уменьшается на d . Пар n , поэтому $2S = (a_1 + a_n) \cdot n$ и $S = (a_1 + a_n) \cdot n : 2$. Деление на 2 появилось из-за того, что мы сложили два одинаковых набора.

Учитель: Теперь геометрическая. Откуда формула $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$?

Ученик: Так же по шагам. $b_2 = b_1 q$, $b_3 = b_2 q = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$. Степень на единицу меньше номера. Поэтому $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Учитель: А сумма?

Ученик: $S = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$. Умножу на q : $qS = b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^n$. Вычту первое из второго: почти всё сократится, останется $qS - S = b_1 q^n - b_1$.

Значит $S(q - 1) = b_1(q^n - 1)$ и $S = b_1(q^n - 1) : (q - 1)$ при $q \neq 1$.

Учитель: Зафиксируем алгоритм, он подходит к любому заданию 14:

1. Определи вид: арифметическая (прибавляем d) или геометрическая (умножаем на q).
2. Выпиши, что дано и что найти: a_1 , d (или b_1 , q), номера членов, число членов n .
3. Если не хватает a_1 и d : найди d по двум членам, $d = (a_m - a_k) : (m - k)$, затем a_1 при необходимости.
4. Посчитай шаги: от k до m их $m - k$; от первого члена до n -го их $n - 1$.
5. Подставь в формулу n -го члена или суммы. Каждое действие отдельной строкой.
6. Проверь: выпиши первые 3-4 члена; сумму проверь второй формулой.
7. Перечитай вопрос: член, сумма или номер? Запиши в бланк №1 только число: запятая, минус и цифры по клеткам, без единиц и слов.

Часть 2. Разбор задач А-Е

Задача А. Разность по двум членам и далёкий член

Условие: арифметическая прогрессия (a_n) задана условиями: $a_4 = 5$, $a_9 = -10$. Найдите a_{20} .

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Арифметическая прогрессия. Даны два члена с номерами 4 и 9, надо найти двадцатый. Первого члена нет.

Учитель: Он нужен?

Ученик: Не обязательно. Я могу идти от известного члена шагами по d . Сначала найду d .

Учитель: Откуда берётся d ?

Ученик: От четвёртого до девятого члена $9 - 4 = 5$ шагов. За них значение изменилось на $a_9 - a_4 = -10 - 5 = -15$. Значит $d = -15 : 5 = -3$.

Учитель: Теперь двадцатый член. Сколько шагов от девятого?

Ученик: $20 - 9 = 11$. $a_{20} = a_9 + 11d = -10 + 11 \cdot (-3) = -10 - 33 = -43$.

Учитель: Как проверить?

Ученик: Найду $a_1 = a_4 - 3d = 5 + 9 = 14$ и посчитаю $a_{20} = 14 + 19 \cdot (-3) = 14 - 57 = -43$. Совпало.

Учитель: Какая здесь ловушка?

Ученик: Делить разность членов надо на разность номеров, $9 - 4 = 5$, а не на девять и не на четыре. И от девятого члена до двадцатого шагов 11, не 10.

Ответ: -43.

Для самостоятельного решения (А'): $a_5 = 7$, $a_{11} = -5$. Найдите a_{20} . Ответ: -23.

Задача В. Сумма, когда первый член не дан

Условие: в арифметической прогрессии $a_6 = 14$, $a_{10} = 26$. Найдите сумму первых 15 её членов.

Учитель: Что требуется найти и что для этого нужно?

Ученик: Сумму 15 членов. Формула $S = (a_1 + a_{15}) \cdot 15 : 2$ требует первого и пятнадцатого члена, а у меня они не даны. Значит надо найти d , потом a_1 и a_{15} .

Учитель: Действуй.

Ученик: $d = (26 - 14) : (10 - 6) = 12 : 4 = 3$. Первый член: от a_1 до a_6 пять шагов, поэтому $a_1 = a_6 - 5d = 14 - 15 = -1$. Пятнадцатый: $a_{15} = a_1 + 14d = -1 + 42 = 41$.

Учитель: Сумма?

Ученик: $S_{15} = (-1 + 41) \cdot 15 : 2 = 40 \cdot 15 : 2 = 300$.

Учитель: Проверка?

Ученик: Формула члена $a_n = -1 + 3(n - 1) = 3n - 4$.
Проверяю $a_6 = 18 - 4 = 14$ и $a_{10} = 30 - 4 = 26$, обе
данные сходятся. Сумма $3 \cdot (1 + 2 + \dots + 15) - 4 \cdot 15 =$
 $3 \cdot 120 - 60 = 300$.

Учитель: Где можно потерять балл?

Ученик: От a_1 до a_6 пять шагов, а не шесть: ошибка
даст $a_1 = -4$. И нельзя забыть деление на 2: без него
получится 600.

Ответ: 300.

Для самостоятельного решения (В'): $a_4 = 10$, $a_9 =$
25. Найдите сумму первых 12 членов. Ответ: 210.

Задача С. Сколько членов отрицательные

Условие: сколько отрицательных членов в
арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; -8,2; \dots$?

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Прогрессия возрастает: каждый следующий
член больше на 0,2. Она начинается с $-8,6$ и когда-то
дойдёт до нуля. Мне нужно найти, сколько членов до
этого момента.

Учитель: Как записать условие «член
отрицательный»?

Ученик: $a_n < 0$. Формула $a_n = -8,6 + 0,2(n - 1)$.
Получаю неравенство $-8,6 + 0,2(n - 1) < 0$, то есть
 $0,2(n - 1) < 8,6$, откуда $n - 1 < 43$ и $n < 44$.

Учитель: Какой номер последний?

Ученик: Наибольшее натуральное n , меньшее 44, это
43. Отрицательных членов 43.

Учитель: Проверь границу.

Ученик: $a_{43} = -8,6 + 0,2 \cdot 42 = -8,6 + 8,4 = -0,2$, это
отрицательное число. $a_{44} = -8,6 + 0,2 \cdot 43 = 0$. Ноль не
отрицательный, поэтому 44-й член не считается.

Учитель: Какая здесь главная ловушка?

Ученик: Ответ 44 из-за нуля. Неравенство строгое.
Если бы спрашивали «сколько неположительных»,
ответ был бы 44.

Ответ: 43.

Для самостоятельного решения (С'): сколько
положительных членов в арифметической прогрессии
12,5; 12,1; 11,7; ...? Ответ: 32.

Задача D. Геометрическая прогрессия, **сумма первых членов**

Условие: геометрическая прогрессия (b_n) задана
условиями: $b_1 = -6$, $b_{n+1} = 2b_n$. Найдите сумму первых
пяти её членов.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Рекуррентная запись: каждый следующий
член равен предыдущему, умноженному на 2. Значит
знаменатель $q = 2$. Первый член отрицательный.

Учитель: Какая формула нужна?

Ученик: Сумма: $S_5 = b_1(q^5 - 1) : (q - 1)$. Подставляю:
 $q^5 = 32$, $q^5 - 1 = 31$, $q - 1 = 1$. $S_5 = -6 \cdot 31 : 1 = -186$.

Учитель: Проверь без формулы.

Ученик: Выпишу члены: $-6; -12; -24; -48; -96$.
Сумма $-6 - 12 - 24 - 48 - 96 = -186$. Совпало.

Учитель: Что здесь легко перепутать?

Ученик: Знак: первый член отрицательный, поэтому
ответ отрицательный. И q^5 означает пять множителей
по 2, это 32, а не $5 \cdot 2 = 10$.

Ответ: -186 .

Для самостоятельного решения (D'): $b_1 = 5$, $b_{n+1} =$
 $-2b_n$. Найдите сумму первых четырёх членов. Ответ:
 -25 .

Задача Е. Практическая задача: места в **зале**

Условие: в зрительном зале 18 рядов: в первом ряду
14 мест, а в каждом следующем на 2 места больше,
чем в предыдущем. Сколько всего мест в зале?

Учитель: Какая здесь прогрессия?

Ученик: «На 2 места больше, чем в предыдущем»
значит прибавляем одно и то же число:
арифметическая, $a_1 = 14$, $d = 2$. Число рядов $n = 18$.
Всего мест в зале сумма первых 18 членов.

Учитель: Что считаем сначала?

Ученик: Последний ряд: $a_{18} = 14 + 17 \cdot 2 = 48$. До
восемнадцатого ряда 17 прибавлений.

Учитель: Сумма?

Ученик: $S_{18} = (14 + 48) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$.

Учитель: Проверь второй формулой.

Ученик: $S_{18} = (2 \cdot 14 + 17 \cdot 2) \cdot 18 : 2 = 62 \cdot 9 = 558$.
Совпало.

Учитель: Какие ловушки?

Ученик: Шагов 17, а не 18. И вопрос «сколько всего
мест»: ответ не 48 (число мест в последнем ряду), а
сумма по всем рядам.

Ответ: 558.

Для самостоятельного решения (Е'): в зале 20
рядов: в первом 10 мест, в каждом следующем на 3
больше. Сколько мест в зале? Ответ: 770.

План урока (индивидуальный, 60 **минут)**

- 0-5 мин. Вход и устный опрос.** 5 вопросов из
теории (рекомендую вопросы про формулу n -го
члена и шаги $n - 1$, про сумму арифметической
прогрессии, про отличие арифметической от
геометрической). Ошибки записать: они определяют
акценты урока.
- 5-15 мин. Теория.** Диалог «Часть 1»: ученик сам
объясняет, откуда берутся формула n -го члена,
сумма (пары) и сумма геометрической прогрессии.
Учитель фиксирует алгоритм, памятка остаётся
перед глазами.
- 15-25 мин. Разбор в диалоге.** Задача А: учитель
только задаёт вопросы, ученик вслух объясняет
«откуда это берётся».
- 25-40 мин. Самостоятельная работа.** Задачи В и
С. Ученик записывает каждое действие, учитель
молчит и фиксирует ошибки. Затем сверка с
разбором и ловушками.
- 40-50 мин. Пятиминутка.** Вариант А (5-7 минут),
проверка по ответам. Четыре и более баллов из
пяти: тренажёр с новыми числами; меньше:
повторить ловушки, где были ошибки.
- 50-57 мин. Работа над ошибками и бланк.**
Каждая ошибка: какое правило нарушено,
переписать верно, решить аналогичное.
Потренироваться записывать ответ в бланк №1
(минус и запятая занимают клетки, без слов).
- 57-60 мин. Итог и ДЗ.** Ученик называет три
ловушки и два признака, по которым определяет
вид прогрессии. Выдать домашнюю карточку.
Самооценка от 1 до 5: «могу объяснить это
другому».

Резерв: если урок идёт быстрее, разобрать D
(геометрическая) или Е (практическая). Если
медленнее, пятиминутку перенести на домашнюю
работу.

План домашней работы

1. **День 1.** Домашняя карточка: 4 задачи, 20-25 минут. Записывать каждое действие, ответ вносить в бланк по правилам памятки.
 2. **Дни 2-3.** Тренажёр с новыми числами: по 5 заданий в день, брать типы, где были ошибки на уроке.
 3. **Перед следующим уроком.** 3 вопроса устного опроса, ученик отвечает первым делом (5 минут).
-

4. **Следующий урок.** Проверка карточки по ключевым точкам из её конца (10 минут), затем зачётный лист (уровни 1 и 2) на оценку; уровень 3 по желанию.
5. **Через неделю.** Три задачи на прогрессии вперемешку с другой темой (проценты, уравнения, степени), чтобы проверить, что навык удержался.