

Проценты (задание 21)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, часть 2, задание 21).

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи — похожая для самостоятельного решения (ответ в конце файла).

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка.

Задачи разбора: 1. Два одинаковых снижения. 2. Вверх на $x\%$, вниз на $x\%$. 3. Смесь, два условия. 4. Сплавы. 5. Сушка.

Задача 1. Два одинаковых снижения

Условие. Цену на товар два раза подряд снижали на одно и то же число процентов. Сначала товар стоил 5000 рублей, после двух снижений стал стоить 4050 рублей. На сколько процентов снижали цену каждый раз?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Прочитай условие. Что мы видим?

Ученик: Задача на проценты, задание 21. Было 5000 рублей, стало 4050. Цену снижали два раза на одно и то же число процентов. Надо найти, на сколько процентов.

Учитель: Что здесь легко понять неверно?

Ученик: Что снижение одно, на двойное число процентов. А их два.

Учитель: Хорошо. А от какой цены считают второе снижение?

Ученик: От той, которая получилась после первого. Не от 5000.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как изменить число на p процентов? Сформулируй правило.

Ученик: Чтобы уменьшить число на p процентов, надо найти p процентов от него и вычесть. Или сразу умножить на $1 - p/100$.

Учитель: Верно, второй способ короче. Как называют такой множитель?

Ученик: Коэффициент. Для снижения на 15 процентов он равен 0,85.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какие шаги ты сделаешь до всякого счёта?

Ученик: Обозначу процент за x . Запишу цену после каждого снижения. Составлю уравнение. Решу. Выберу подходящий корень и проверю.

Учитель: Фиксируем. Так решают любую задачу, где неизвестен процент изменения:

1. Обозначить неизвестное x с ограничением.
2. Каждое изменение записать коэффициентом.
3. Составить уравнение: начальное значение $\cdot$ коэффициенты = конечное.
4. Решить уравнение.
5. Отобрать корень по смыслу, проверить подстановкой.
6. Записать ответ на вопрос задачи.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что обозначим за x и какие ограничения запишем?

Ученик: Пусть x процентов — на сколько снижали цену каждый раз. Он больше 0 и меньше 100.

Учитель: Почему меньше 100?

Ученик: Если снизить на 100 процентов, цена станет нулём, а потом снижать нечего.

Учитель: Чему равна цена после первого снижения?

Ученик: $5000 \cdot (1 - x/100)$.

Учитель: А после второго?

Ученик: Эту цену снова умножаем на $(1 - x/100)$. Получается $5000 \cdot (1 - x/100)^2$.

Если ученик ответит: $5000 \cdot (1 - 2x/100)$.

Учитель: Возьми $x = 10$ и посчитай два способа: сначала по твоей формуле, потом снизив 5000 на 10 процентов, а получившуюся цену ещё раз на 10 процентов. Совпало?

Ученик: По формуле 4000, вторым способом $4500 \cdot 0,9 = 4050$. Не совпало.

Учитель: Какое снижение ты не учёл?

Ученик: Что второй раз процент берут от меньшей цены, а не от 5000.

Учитель: Составь уравнение.

Ученик: $5000 \cdot (1 - x/100)^2 = 4050$.

Учитель: Как упростить?

Ученик: Разделить на 5000. Получится $(1 - x/100)^2 = 0,81$.

Учитель: Откуда взялось 0,81?

Ученик: $4050 : 5000 = 0,81$.

Учитель: Какое число в квадрате даёт 0,81?

Ученик: 0,9 и минус 0,9.

Учитель: Запиши оба случая до конца.

Ученик: $1 - x/100 = 0,9$, тогда $x/100 = 0,1$, $x = 10$. И $1 - x/100 = -0,9$, тогда $x/100 = 1,9$, $x = 190$.

Учитель: Какой корень подходит?

Ученик: 10. Корень 190 больше 100, он не подходит по ограничению.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: Снизим 5000 на 10 процентов: 4500. Ещё на 10 процентов: 4050. Совпало с условием.

Учитель: Как записать ответ?

Ученик: «Ответ: 10%». В решении задания 21 единицы пишут.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь такую задачу в следующий раз?

Ученик: По словам «два раза подряд», «на одно и то же число процентов» и по тому, что известны начальная и конечная цена.

Учитель: Реши сам: цену снижали два раза подряд на одно и то же число процентов, было 2000 рублей, стало 1280 рублей. На сколько процентов снижали цену каждый раз?

Задача 2. Вверх на $x\%$, вниз на $x\%$

Условие. Цену товара повысили на $x\%$, а затем снизили на $x\%$. В результате товар стал дешевле первоначальной цены на 4%. Найдите x .

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Проценты, задание 21. Цену сначала повысили на x процентов, потом снизили на столько же. В итоге она на 4 процента меньше начальной. Надо найти x .

Учитель: Чего в условии нет, и мешает ли это?

Ученик: Нет самой цены. Наверное, обозначу её буквой a , и она сократится.

Учитель: А что в формулировке «на 4% дешевле» опасно?

Ученик: Можно принять 4 процента за итоговую цену. А итоговая цена — это не 4 процента, а на 4 процента меньше.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что мы знаем про несколько изменений подряд?

Ученик: Проценты не складывают. Коэффициенты перемножают, потому что каждый следующий процент берётся от нового значения.

Учитель: Какие здесь коэффициенты?

Ученик: Повышение на x процентов — $1 + x/100$. Снижение — $1 - x/100$.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм берём?

Ученик: Тот же, что в первой задаче: x с ограничением, коэффициенты, уравнение, решение, отбор корня, проверка, ответ.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Пусть a — первоначальная цена. Чему равна цена после обоих изменений?

Ученик: $a \cdot (1 + x/100) \cdot (1 - x/100)$.

Учитель: Какую долю от a составляет итоговая цена?

Ученик: 0,04, потому что на 4 процента меньше.

Если ученик ответит: 0,04.

Учитель: Допустим, $a = 100$ рублей. Цена стала на 4 процента ниже. Сколько рублей она стоит?

Ученик: 96.

Учитель: Какая доля от 100 это?

Ученик: 0,96.

Учитель: Составь уравнение.

Ученик: $(1 + x/100)(1 - x/100) = 0,96$. Буква x сократилась.

Учитель: Какую формулу сокращённого умножения ты видишь в левой части?

Ученик: Разность квадратов. Получается $1 - (x/100)^2$.

Учитель: Продолжай.

Ученик: $1 - x^2/10\,000 = 0,96$. Значит $x^2/10\,000 = 0,04$, $x^2 = 400$, $x = 20$ или $x = -20$.

Учитель: Какой корень берём?

Ученик: 20, потому что процент здесь положительный.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверим.

Ученик: $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$, то есть цена составляет 96 процентов, она на 4 процента ниже. Ответ: 20%.

Этап 6. Перенос

Учитель: Почему при «вверх на x , вниз на x » цена никогда не возвращается к начальной?

Ученик: Потому что получается $1 - (x/100)^2$, это меньше единицы.

Учитель: Реши сам: цену повысили на x процентов, потом снизили на x процентов, и она стала на 1% ниже первоначальной. Найдите x .

Задача 3. Смесь, два условия

Условие. Смешали 30%-ный и 60%-ный растворы кислоты и добавили 10 кг чистой воды, получили 36%-ный раствор кислоты. Если бы вместо воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 41%-ный раствор. Сколько килограммов 30%-ного раствора использовали?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Задача на смеси, задание 21. Есть два раствора, 30 и 60 процентов. Два случая: с водой получается 36 процентов, с 50-процентным раствором — 41. Надо найти массу 30-процентного раствора.

Учитель: Сколько неизвестных и сколько условий?

Ученик: Неизвестных две: массы двух растворов. Условий тоже два. Значит, нужна система.

Учитель: Что здесь ловушка?

Ученик: Вода входит в массу смеси, а кислоты в ней нет. И ответ надо дать про 30-процентный раствор, а не про 60-процентный.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как найти массу вещества в растворе?

Ученик: Массу раствора умножить на концентрацию. Концентрация — это масса вещества, делённая на массу раствора.

Учитель: Можно ли при смешивании складывать концентрации?

Ученик: Нет. Складывают массы вещества и массы растворов.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм для смесей и сплавов?

Ученик: Обозначить массы. Записать для каждого раствора массу вещества. Составить уравнение по веществу. Если условий два, составить систему. Решить, проверить, ответить.

Учитель: Фиксируем:

1. Обозначить массы x , y (больше 0).
2. Для каждой смеси: масса раствора $\cdot$ доля = масса вещества.
3. Уравнение по веществу: вещество частей = вещество смеси.
4. Два условия — система, решаем подстановкой.
5. Проверить по условию.
6. Ответить на вопрос задачи.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что обозначим?

Ученик: Пусть x кг — 30%-ного раствора, y кг — 60%-ного.

Учитель: Сколько килограммов кислоты в первой смеси, где добавили воду?

Ученик: $0,3x + 0,6y$. Вода кислоты не даёт.

Учитель: А чему равна масса всей первой смеси?

Ученик: $x + y + 10$.

Если ученик ответит: $x + y$.

Учитель: Из чего состоит смесь в первом случае?

Ученик: Из двух растворов и воды. Значит, ещё 10 кг.

Учитель: Составь первое уравнение.

Ученик: $0,3x + 0,6y = 0,36(x + y + 10)$.

Учитель: Упрости.

Ученик: $0,3x + 0,6y = 0,36x + 0,36y + 3,6$. Переносу: $0,24y - 0,06x = 3,6$. Делю на 0,06: $4y - x = 60$.

Учитель: Второй случай. Сколько кислоты в добавленных 10 кг 50%-ного раствора?

Ученик: 5 кг.

Учитель: Составь второе уравнение.

Ученик: $0,3x + 0,6y + 5 = 0,41(x + y + 10)$.

Учитель: Упрости.

Ученик: $0,3x + 0,6y + 5 = 0,41x + 0,41y + 4,1$. Переносу: $0,19y - 0,11x = -0,9$. Умножаю на 100: $19y - 11x = -90$.

Учитель: Как решим систему из $4y - x = 60$ и $19y - 11x = -90$?

Ученик: Из первого $x = 4y - 60$. Подставляю: $19y - 11(4y - 60) = -90$. Получается $19y - 44y + 660 = -90$, значит $-25y = -750$ и $y = 30$.

Учитель: А что спрашивали в задаче?

Ученик: Массу 30-процентного раствора. $x = 4 \cdot 30 - 60 = 60$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверим?

Ученик: Первый случай: $60 + 30 + 10 = 100$ кг смеси, кислоты $18 + 18 = 36$ кг, это 36 процентов.

Второй случай: кислоты $18 + 18 + 5 = 41$ кг из 100 кг, это 41 процент. Верно. Ответ: 60 кг.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам ты узнаешь систему в задаче на смеси?

Ученик: Если известны две неизвестные массы и есть два условия, про которые можно написать уравнения.

Учитель: Реши сам: смешали 20%-ный и 60%-ный растворы кислоты и получили 8 кг 35%-ного раствора. Сколько килограммов 20%-ного раствора взяли?

Задача 4. Сплавы

Условие. Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава на 3 кг больше массы первого. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Сплавы, задание 21. Два сплава с медью 10 и 40 процентов, второй тяжелее первого на 3 кг. Из них сделали третий, в нём 30 процентов меди. Надо найти массу третьего.

Учитель: Что может сбить?

Ученик: Спрашивают массу третьего сплава, а не первого. И проценты надо переводить в десятичные дроби.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что остаётся неизменным, когда сплавляют два сплава?

Ученик: Масса меди. Вся медь первого и второго сплава попадает в третий. И массы тоже складываются.

Учитель: Запиши это как равенство словами.

Ученик: Медь первого сплава плюс медь второго равна меди третьего.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм?

Ученик: Тот же, что для смесей: массы через x , таблица «масса · доля = масса вещества», уравнение по веществу, решение, проверка, ответ на вопрос.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что обозначаем и как выражаем остальные массы?

Ученик: x кг — масса первого сплава. Второй — $x + 3$. Третий — сумма: $2x + 3$.

Учитель: Сколько меди в каждом сплаве?

Ученик: В первом $0,1x$, во втором $0,4(x + 3)$, в третьем $0,3(2x + 3)$.

Если ученик ответит: в третьем $0,3x$.

Учитель: Какая масса у третьего сплава?

Ученик: $2x + 3$, а не x . Значит, $0,3(2x + 3)$.

Учитель: Составь уравнение.

Ученик: $0,1x + 0,4(x + 3) = 0,3(2x + 3)$.

Учитель: Раскрой скобки.

Ученик: $0,1x + 0,4x + 1,2 = 0,6x + 0,9$. Слева $0,5x + 1,2$. Переносу: $0,3 = 0,1x$, значит $x = 3$.

Учитель: Это ответ?

Ученик: Нет. x — масса первого сплава. Третий весит $2 \cdot 3 + 3 = 9$ кг.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверим по меди.

Ученик: Первый сплав 3 кг, меди 0,3 кг. Второй 6 кг, меди 2,4 кг. Вместе 2,7 кг. В третьем 9 кг, 30 процентов — 2,7 кг. Совпало. Ответ: 9 кг.

Этап 6. Перенос

Учитель: Как ты узнаешь такую задачу?

Ученик: Есть «сплав», проценты вещества, массы связаны разницей, из двух получают третий. Уравнение по массе вещества.

Учитель: Реши сам: первый сплав содержит 20% олова, второй — 60% олова. Масса второго на 2 кг больше массы первого. Из них получили третий сплав с 45% олова. Найдите массу третьего сплава.

Задача 5. Сушка

Условие. Свежие яблоки содержат 80% воды, а сушёные — 20% воды. Сколько килограммов воды испарится при сушке 50 кг свежих яблок?

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Проценты, задание 21. В свежих яблоках 80 процентов воды, в сушёных 20. Берём 50 кг свежих. Надо узнать, сколько воды испарилось.

Учитель: Что сбивает в этом условии?

Ученик: Проценты воды разные, а база разная: масса меняется. И спрашивают, сколько испарилось, а не сколько осталось.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что остаётся неизменным при сушке?

Ученик: Сухое вещество. Испаряется только вода.

Учитель: Как найти долю сухого вещества, если известна доля воды?

Ученик: Из 100 процентов вычесть долю воды.

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Какой алгоритм?

Ученик: Найти массу сухого вещества до сушки. Выразить массу после сушки через сухое вещество. Найти, сколько воды ушло. Проверить, ответить.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Сколько сухого вещества в 50 кг свежих яблок?

Ученик: Воды 80 процентов, сухого 20. $0,2 \cdot 50 = 10$ кг.

Если ученик ответит: $0,8 \cdot 50 = 40$ кг.

Учитель: Что ты нашёл, 80 процентов от 50?

Ученик: Воду. А мне нужно сухое вещество.

Учитель: Какую долю составляет сухое вещество в сушёных яблоках?

Ученик: $100 - 20 = 80$ процентов.

Учитель: Пусть m кг — масса сушёных яблок. Составь уравнение.

Ученик: $0,8m = 10$, потому что сухого вещества после сушки столько же, сколько было.

Учитель: Найди m .

Ученик: $m = 10 : 0,8 = 12,5$ кг.

Учитель: Что ответим на вопрос задачи?

Ученик: Испарилось $50 - 12,5 = 37,5$ кг воды.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Проверим по воде.

Ученик: В свежих воды 40 кг. В сушёных 20 процентов от 12,5 — это 2,5 кг. Испарилось $40 - 2,5 = 37,5$ кг. Совпало. Ответ: 37,5 кг.

Этап 6. Перенос

Учитель: Как узнаешь такую задачу?

Ученик: Слова «свежие» и «сушёные», воды разный процент, масса меняется. Сухое вещество постоянно.

Учитель: Реши сам: свежая трава содержит 75% воды, а сено — 15% воды. Сколько килограммов сена получится из 340 кг свежей травы?

Универсальный алгоритм для задания 21 (проценты)

1. Определи тип: цена и вклад (коэффициенты), смесь и сплав (масса вещества), сушка (сухое вещество).
2. Обозначь неизвестное с единицами и ограничением.
3. Переведи проценты в десятичные дроби.
4. Составь уравнение или систему: изменения перемножай, вещество складывай.
5. Реши, отбери корень, проверь подстановкой.
6. Запиши ответ на тот вопрос, который задан.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. 20%. $(2000 \cdot (1 - x/100))^2 = 1280$; $(1 - x/100)^2 = 0,64$; $x = 20$.)
210. $(1 - x^2/10\,000 = 0,99$; $x^2 = 100$.)
3. 5 кг. $(0,2x + 0,6(8 - x) = 0,35 \cdot 8$; $4,8 - 0,4x = 2,8$; $x = 5$.)
4. 8 кг. $(0,2x + 0,6(x + 2) = 0,45(2x + 2)$; $0,8x + 1,2 = 0,9x + 0,9$; $x = 3$, третий $2 \cdot 3 + 2 = 8$.)
5. 100 кг. (Сухого в траве $0,25 \cdot 340 = 85$ кг; в сене его 85%: $85 : 0,85 = 100$.)