

Квадратные уравнения (№9 и №20)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, №9 часть 1 и №20 часть 2). **Как пользоваться:** сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи есть похожая для самостоятельного решения (ответы в конце файла). **Где мы в теме:** теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → зачётный лист → домашняя карточка. **Задачи разбора:** 0. Полное квадратное уравнение (№9). 1. Замена переменной. 2. Дробно-рациональное уравнение. 3. Кубическое уравнение, группировка. 4. Посторонний корень. 5. Система с квадратным уравнением.

Задача 0. Полное квадратное уравнение (уровень №9)

Условие. Решите уравнение $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Если корней несколько, запишите больший из них.

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Квадратное уравнение, оно уже в виде $ax^2 + bx + c = 0$. Коэффициенты: $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$. В условии просят записать только больший корень.

Учитель: Откуда берётся минус у b ?

Ученик: Перед $3x$ стоит минус, значит $b = -3$. Знак коэффициента берём вместе с числом.

Учитель: Какой способ выберешь?

Ученик: Неполным оно не является, оба коэффициента b и c не равны нулю. Значит, дискриминант: $D = b^2 - 4ac$.

Учитель: Считай.

Ученик: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 9 + 40 = 49$. D больше нуля, будет два корня. $\sqrt{D} = 7$.

Учитель: Откуда в формуле двойка в знаменателе?

Ученик: Формула $x = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$, а у нас $a = 2$, поэтому знаменатель 4. Числитель: $-b = 3$. Получаем $x = (3 \pm 7) / 4$. Это $x_1 = 10/4 = 2,5$ и $x_2 = -4/4 = -1$.

Учитель: Проверь по Виету.

Ученик: Сумма корней должна быть $-b/a = 3/2 = 1,5$. У нас $2,5 + (-1) = 1,5$. Произведение $c/a = -5/2 = -2,5$, а $2,5 \cdot (-1) = -2,5$. Верно.

Учитель: Что запишешь в бланк?

Ученик: Больший корень, 2,5. Десятичную дробь пишу через запятую.

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $2x^2 - 7x + 3 = 0$. Запишите меньший корень.

Задача 1. Замена переменной

Условие. Решите уравнение $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Уравнение четвёртой степени, если раскрыть скобки. Это №20. Но выражение $x^2 - 3x$ встречается два раза.

Учитель: Что в такой задаче легко сделать неверно?

Ученик: Раскрывать скобки и получать длинный многочлен четвёртой степени. Или найти значение вспомогательной переменной и забыть вернуться к x .

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Какой приём применяют, если одно и то же выражение повторяется?

Ученик: Замена переменной. Это выражение обозначают новой буквой, решают более простое уравнение, потом возвращаются к x .

Этап 3. Алгоритм

Учитель: Запиши шаги.

Ученик: 1) Ввести t . 2) Решить квадратное уравнение относительно t . 3) Для каждого t решить уравнение с x . 4) Собрать все корни и записать в ответ.

Задача 2. Дробно-рациональное уравнение

Условие. Решите уравнение $(x + 1)/(x - 1) + (x - 1)/(x + 1) = 10/3$.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Уравнение с дробями, в знаменателях x . Значит, есть значения x , при которых знаменатель равен нулю.

Учитель: Какие?

Ученик: $x - 1 = 0$ при $x = 1$ и $x + 1 = 0$ при $x = -1$. Эти числа корнями быть не могут.

Этап 4. Решение

Учитель: Вводим замену. Откуда берём уравнение для t ?

Ученик: Пусть $t = x^2 - 3x$. Заменяю это выражение везде. Получается $t^2 - 2t - 8 = 0$.

Учитель: Решай.

Ученик: $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$. $t = (2 \pm 6) / 2$: $t_1 = 4$, $t_2 = -2$.

Учитель: Что теперь?

Ученик: Возвращаюсь к x . Первое: $x^2 - 3x = 4$.

Переношу: $x^2 - 3x - 4 = 0$, $D = 9 + 16 = 25$, $x = (3 \pm 5) / 2$, это $x = 4$ и $x = -1$.

Учитель: Второе.

Ученик: $x^2 - 3x = -2$, значит $x^2 - 3x + 2 = 0$, $D = 9 - 8 = 1$, $x = (3 \pm 1) / 2$, то есть $x = 2$ и $x = 1$.

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Проверю $x = 1$: $(1 - 3)^2 - 2 \cdot (1 - 3) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$. Верно.

Учитель: Что запишешь в ответ?

Ученик: Все четыре корня: -1 ; 1 ; 2 ; 4 . Не t , а x .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как избавиться от дробей?

Ученик: Привести к общему знаменателю и умножить обе части на него, предварительно записав ОДЗ.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Записать ОДЗ. 2) Привести дроби к общему знаменателю. 3) Свести к квадратному уравнению. 4) Решить. 5) Проверить корни по ОДЗ.

Этап 4. Решение

Учитель: Какой общий знаменатель?

Ученик: $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Первую дробь домножаю на $(x + 1)$, вторую на $(x - 1)$: числитель $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2$.

Учитель: Куда делись слагаемые $2x$ и $-2x$?

Ученик: Сократились: их сумма равна нулю.

Учитель: Что записываешь дальше?

Ученик: $(2x^2 + 2)/(x^2 - 1) = 10/3$. По основному свойству пропорции $3(2x^2 + 2) = 10(x^2 - 1)$. Раскрываю: $6x^2 + 6 = 10x^2 - 10$. Переносу: $4x^2 = 16$, $x^2 = 4$, $x = 2$ или $x = -2$.

Задача 3. Кубическое уравнение, группировка

Условие. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Кубическое уравнение. Формул для него в школе нет. Значит, надо разложить на множители.

Учитель: Что легко сделать неверно?

Ученик: Поделить обе части на $x + 3$. Тогда потеряю корень.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Ученик: Если у многочлена четыре члена, группируют их попарно и выносят общий множитель. Потом применяют правило: произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Сгруппировать. 2) Вынести общие множители. 3) Вынести общую скобку. 4) Разложить остаток. 5) Приравнять каждый множитель к нулю.

Задача 4. Посторонний корень

Условие. Решите уравнение $x/(x - 2) - 8/(x^2 - 4) = 1/(x + 2)$.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Дробное уравнение. В знаменателе $x^2 - 4$. Это разность квадратов, $(x - 2)(x + 2)$.

Учитель: Что легко сделать неверно?

Ученик: Не записать ОДЗ и оставить в ответе число, при котором знаменатель равен нулю.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Ученик: Как в задаче 2: ОДЗ, общий знаменатель, квадратное уравнение, отбор корней.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Разложить знаменатели. 2) Записать ОДЗ. 3) Умножить на общий знаменатель. 4) Решить. 5) Отбросить числа, не входящие в ОДЗ.

Этап 4. Решение

Учитель: ОДЗ?

Ученик: $x \neq 2$ и $x \neq -2$.

Задача 5. Система с квадратным уравнением

Условие. Решите систему уравнений: $x^2 + y^2 = 29$, $x - y = 3$.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Система из квадратного и линейного уравнений. Ответ будет в виде пар.

Учитель: Что легко сделать неверно?

Ученик: Неверно раскрыть квадрат суммы или записать в ответ только значения y .

Этап 2. Как мы решаем подобное

Ученик: Способом подстановки: из линейного уравнения выражаю одну переменную, подставляю в квадратное.

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Оба числа не равны 1 и -1 , значит, входят в ОДЗ. Проверю $x = 2$: $3/1 + 1/3 = 10/3$. Верно. Ответ: -2 ; 2 .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $(x + 2)/(x - 2) + (x - 2)/(x + 2) = 5/2$.

Этап 4. Решение

Учитель: Какие пары?

Ученик: $(x^3 + 3x^2)$ и $(-4x - 12)$. В первой вынесу x^2 , получится $x^2(x + 3)$. Во второй вынесу -4 : $-4(x + 3)$. В обеих осталась скобка $(x + 3)$.

Учитель: Что дальше?

Ученик: Выношу общую скобку: $(x + 3)(x^2 - 4) = 0$.

Разность квадратов: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Получаю $(x + 3)(x - 2)(x + 2) = 0$.

Учитель: Откуда три корня?

Ученик: Три множителя, каждый равен нулю по очереди: $x = -3$, $x = 2$, $x = -2$.

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Проверю $x = -3$: $(-27) + 27 + 12 - 12 = 0$. Верно. Ответ: -3 ; -2 ; 2 .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$.

Учитель: Умножаем на $(x - 2)(x + 2)$. Что получается с каждой дробью?

Ученик: Первая дробь: знаменатель $x - 2$ сократился, остаётся $x(x + 2)$. Вторая: знаменатель $x^2 - 4$ сократился целиком, остаётся 8 . Третья: знаменатель $x + 2$ сократился, остаётся $x - 2$. Получаю $x(x + 2) - 8 = x - 2$.

Учитель: Дальше.

Ученик: $x^2 + 2x - 8 = x - 2$. Переносу всё влево: $x^2 + 2x - 8 - x + 2 = 0$, значит $x^2 + x - 6 = 0$. $D = 1 + 24 = 25$. $x = (-1 \pm 5) / 2$: $x = 2$ и $x = -3$.

Этап 5. Проверка и оформление

Учитель: Что делаешь с корнями?

Ученик: Сверяю с ОДЗ. Число 2 запрещено: при нём знаменатель $x - 2$ обращается в нуль, это посторонний корень. Число -3 подходит. Проверка: $-3/(-5) - 8/(9 - 4) = 0,6 - 1,6 = -1$, а $1/(-3 + 2) = -1$. Верно. Ответ: -3 .

Для самостоятельного решения. Решите уравнение $x/(x - 4) - 32/(x^2 - 16) = 1/(x + 4)$.

Этап 3. Алгоритм

Ученик: 1) Выразить. 2) Подставить. 3) Решить квадратное. 4) Найти вторую переменную для каждого корня. 5) Записать пары.

Этап 4. Решение

Учитель: Что выражаешь?

Ученик: Из $x - y = 3$ получаю $x = y + 3$.

Учитель: Подставляй.

Ученик: $(y + 3)^2 + y^2 = 29$. Квадрат суммы: $y^2 + 6y + 9$. Складываю: $2y^2 + 6y + 9 = 29$, значит $2y^2 + 6y - 20 = 0$. Делю на 2 : $y^2 + 3y - 10 = 0$.

Учитель: Решай.

Ученик: $D = 9 + 40 = 49$. $y = (-3 \pm 7) / 2$: $y = 2$ или $y = -5$.

Учитель: Как найти x ?

Ученик: По формуле $x = y + 3$. Если $y = 2$, то $x = 5$.
Если $y = -5$, то $x = -2$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1. $2x^2 - 7x + 3 = 0$: $D = 25$, $x = 3$ и $x = 0,5$; меньший корень $0,5$.
2. -1 ; 1 ; 3 ; 5 ($t = x^2 - 4x$; $t^2 - 2t - 15 = 0$; $t = 5$ или -3).
3. -6 ; 6 (ОДЗ $x \neq \pm 2$; $(2x^2 + 8)/(x^2 - 4) = 5/2$; $4x^2 + 16 = 5x^2 - 20$; $x^2 = 36$).

Этап 5. Проверка и оформление

Ученик: Пара $(5; 2)$: $25 + 4 = 29$, $5 - 2 = 3$. Пара $(-2; -5)$: $4 + 25 = 29$, $-2 - (-5) = 3$. Обе подходят. Ответ записываю парами: $(5; 2)$, $(-2; -5)$.

Для самостоятельного решения. Решите систему уравнений: $x^2 + y^2 = 13$, $x - y = 1$.

4. -5 ; -2 ; 2 ($(x + 5)(x - 2)(x + 2) = 0$).
5. -7 (ОДЗ $x \neq \pm 4$; $x^2 + 3x - 28 = 0$; корни 4 и -7 ; число 4 посторонний).
6. $(3; 2)$, $(-2; -3)$ ($x = y + 1$; $y^2 + y - 6 = 0$; $y = 2$ или $y = -3$).