

Графики функций (№22, основа — №11)

Разбор в формате диалога «ученик — учитель»

Участники: Учитель и Ученик (9 класс, подготовка к ОГЭ, №22 часть 2, 2 балла).

Как пользоваться: сначала отвечай сам, потом сверяйся с диалогом. После каждой задачи есть похожая для самостоятельного решения (ответы в конце файла). Рисунки к задачам смотри в «Разборе 5 задач»: диалог объясняет, откуда что берётся, а график строится по таблице.

Где мы в теме: теория и устный опрос → тест → пятиминутка → этот разбор → тренажёры → памятка → зачётный лист → домашняя карточка.

Задачи разбора: 1. Раскрытие модуля, две параболы. 2. Дробь и выколотые точки. 3. Гипербола с модулем и прямой $y = kx$. 4. Кусочная функция. 5. Модуль трёхчлена и прямая $y = kx$.

Общая часть. Как решается любое задание №22

Учитель: В №22 всегда одно и то же: дана функция с подвохом (модуль, дробь, две формулы) и прямая с параметром. Что у нас строится и что считается?

Ученик: Строится график. Потом прямая двигается, и мы считаем, в скольких точках она его пересекает.

Учитель: Верно. Прямая бывает двух видов. Какие?

Ученик: $y = m$, горизонтальная. И $y = kx$, она всегда проходит через начало координат и поворачивается.

Учитель: Алгоритм для всех пяти задач, фиксируем:

1. Записать область определения и раскрыть модули (получить формулы на промежутках).
2. Упростить каждую формулу, построить график по таблице, отметить выколотые и закрашенные точки.
3. Двигать прямую ($y = m$ вверх, $y = kx$ вокруг начала), считать общие точки.
4. Отдельно проверить особые значения: вершины, выколотые точки, концы промежутков.
5. Записать ответ, не забыв строгость неравенств.

Учитель: Какой шаг самый опасный?

Ученик: Четвёртый. Там легко потерять значение или взять лишнее.

Учитель: Да, на нём теряются баллы. Поэтому в каждой задаче ниже есть ветка с типичной ошибкой.

Задача 1. Раскрытие модуля: две параболы

Условие. Постройте график функции $y = x|x| - 2|x| - 4x$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Функцию с модулем, к тому же умноженным на x . Прямая $y = m$ горизонтальная. Нужно найти m , при которых общих точек ровно две.

Учитель: Что тут легко упустить?

Ученик: Что общих точек бывает одна, две или три в зависимости от m . Нужны именно «ровно две».

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что делаем с модулем?

Ученик: Раскрываем отдельно для $x \geq 0$ и для $x < 0$.

Учитель: Формулировка: $|x| = x$ при $x \geq 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$. А что значит «общая точка графика и прямой $y = m$ »?

Ученик: Это решение уравнения $f(x) = m$. Сколько решений, столько общих точек.

Этап 3. По какому алгоритму

Учитель: Назови шаги до вычислений.

Ученик: Раскрыть модуль. Привести каждую формулу к виду параболы и найти вершину. Построить на своих

промежутках. Двигать прямую снизу вверх. Проверить уровни вершин.

Учитель: Фиксируем алгоритм из общей части (шаги 1–5).

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Раскрываем модуль при $x \geq 0$. Что получилось?

Ученик: $y = x^2 - 2x - 4x = x^2 - 6x$.

Учитель: Как найти вершину?

Ученик: Выделяю квадрат: $(x - 3)^2 - 9$. Вершина (3; -9), нули 0 и 6.

Учитель: Теперь $x < 0$.

Ученик: $|x| = -x$, значит $y = -x^2 + 2x - 4x = -x^2 - 2x = -(x + 1)^2 + 1$. Вершина (-1; 1), нули -2 и 0.

Учитель: Что проверяем у вершин?

Ученик: Что они лежат на своих промежутках. $3 \geq 0$ и $-1 < 0$, обе подходят.

Если ученик ответит: строим обе параболы целиком.

Учитель: Проверь: $x = 4$ по какой формуле считается?

А что делает вторая парабола в точке $x = 4$? Её часть мы берём только при $x < 0$.

Учитель: Двигаем прямую $y = m$ снизу вверх. Что видим?

Ученик: Ниже -9 прямая пересекает только левую часть: одна точка. На уровне -9 касается правой вершины и пересекает левую: две. От -9 до 1 три. На уровне 1 касается левой вершины и пересекает правую: две. Выше 1 одна.

Учитель: Что в ответ?

Ученик: $m = -9$ и $m = 1$.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Как проверить?

Ученик: Подставить. $m = 1$: $x^2 - 6x = 1$ даёт корни разных знаков, подходит один положительный, плюс вершина (-1; 1). Две точки. $m = -9$: вершина (3; -9) и в левой части $x^2 + 2x - 9 = 0$ даёт один отрицательный корень. Две точки.

Учитель: Как записать ответ?

Ученик: $m = -9$; $m = 1$, и график с отмеченными вершинами.

Этап 6. Перенос

Учитель: По каким признакам узнаешь такое задание?

Ученик: Есть модуль, график строится из частей парабол, прямая горизонтальная, нужно «ровно N точек».

Самостоятельно. $y = x|x| - |x| - 5x$, ровно две общие точки с $y = m$.

Задача 2. Дробь и выколотые точки

Условие. Постройте график функции $y = (x^4 - 20x^2 + 64) / ((x - 2)(x + 4))$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Этап 1. Что мы видим

Учитель: Что мы видим?

Ученик: Дробь. Сверху многочлен четвёртой степени, снизу две скобки. Нужно сократить и построить график, а потом найти m , при которых ровно одна общая точка.

Учитель: Что запомнить до сокращения?

Ученик: Область определения: $x \neq 2$ и $x \neq -4$.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Как раскладывать числитель?

Ученик: Замена $t = x^2$. Получается $t^2 - 20t + 64 = 0$.

Учитель: Правило про область определения: дробь определена, когда знаменатель не равен нулю; сокращённая функция совпадает с исходной везде, кроме этих точек.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Область определения. Разложить числитель. Сократить. Построить график. Выколоть точки. Двигать прямую.

Учитель: Фиксируем алгоритм из общей части.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Корни уравнения для t ?

Ученик: По теореме Виета: сумма 20, произведение 64. Это 4 и 16.

Учитель: Тогда числитель?

Ученик: $(x^2 - 4)(x^2 - 16) = (x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 4)$.

Учитель: Сокращаем на $(x - 2)(x + 4)$. Что осталось?

Ученик: $y = (x + 2)(x - 4) = x^2 - 2x - 8 = (x - 1)^2 - 9$. Вершина (1; -9), нули -2 и 4.

Учитель: Где выколотые точки и как найти их ординаты?

Ученик: При $x = 2$ и $x = -4$. Подставляю в сокращённую формулу: при $x = 2$ получаю -8, при $x = -4$ получаю 16.

Если ученик ответит: подставляю в исходную дробь, получается 0/0.

Учитель: Исходная дробь в этих точках не определена. Ординату берём из сокращённой формулы, это значение, которого «не хватает» графику.

Учитель: Как работает прямая $y = m$?

Ученик: Ниже -9 общих точек нет. На уровне -9 одна, вершина. Выше -9 две: $x = 1 \pm \sqrt{(m + 9)}$. Но одна из них может оказаться выколотой.

Учитель: Когда?

Ученик: Если корень равен 2 или -4. При $m = -8$ корни $x = 2$ и $x = 0$: первый выколот, остаётся одна. При $m = 16$ корни $x = -4$ и $x = 6$: тоже одна.

Этап 5. Проверка и ответ

Учитель: Что проверяем?

Ученик: Что вершина не выколота: $x = 1$, это не 2 и не -4. Значит, $m = -9$ подходит.

Ученик: Ответ: $m = -9$; $m = -8$; $m = 16$.

Этап 6. Перенос

Учитель: Признаки?

Ученик: Дробь с разложимым числителем, в ответе значения m «при которых ровно одна точка» — почти всегда нужно вспомнить про выколотые точки.

Самостоятельно. $y = (x^4 - 52x^2 + 576) / ((x - 4)(x + 6))$, ровно одна общая точка с $y = m$.

Задача 3. Гипербола с модулем и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = (2|x| - 1) / (|x| - 2x^2)$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки. В ответ запишите наибольшее значение k .

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Дробь с модулем. Прямая $y = kx$ проходит через начало координат. Нужно найти k , при которых общих точек нет, и выбрать наибольшее.

Учитель: Где ловушка условия?

Ученик: «Не имеет ни одной точки» и «наибольшее». Нужно записать одно число.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что известно про модуль и квадрат?

Ученик: $x^2 = |x|^2$, и $|x| = x$ при $x \geq 0$, $|x| = -x$ при $x < 0$.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Область определения. Разложить знаменатель. Сократить. Построить две ветви. Выколоть точки. Провести $y = kx$.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Знаменатель?

Ученик: $|x| - 2x^2 = |x|(1 - 2|x|)$. Не равен нулю: $x \neq 0$ и $x \neq \pm 1/2$.

Учитель: Числитель?

Ученик: $2|x| - 1 = -(1 - 2|x|)$. Сокращаю: $y = -1/|x|$.

Учитель: Как выглядит график?

Ученик: При $x > 0$: $y = -1/x$, IV четверть. При $x < 0$: $y = 1/x$, III четверть. Выколоты точки с $x = \pm 1/2$: $y = -2$, то есть (0,5; -2) и (-0,5; -2).

Учитель: Прямая $y = kx$. Сначала $k = 0$.

Ученик: Это ось Ох. График весь ниже оси, общих точек нет. $k = 0$ подходит.

Учитель: Теперь $k > 0$.

Ученик: Прямая идёт через I и III четверти, общая точка может быть только с левой ветвью. $kx = 1/x$, $x^2 = 1/k$, $x = \pm 1/\sqrt{k}$, одна точка. Она выколота, когда $x = \pm 1/2$, то есть $k = 4$. Тогда общих точек нет.

Если ученик ответит: при $k > 0$ общая точка одна, значит, нет подходящих k .

Учитель: А если единственная точка выколота? Что с ней?

Ученик: Не считается. Значит, $k = 4$ подходит. При $k < 0$ симметрично: $k = -4$.

Этап 5. Проверка и ответ

Ученик: Прямая $y = 4x$ проходит через (-0,5; -2): $4 \cdot (-0,5) = -2$. Эта точка выколота, других нет. Значения k : -4; 0; 4. Наибольшее равно 4.

Этап 6. Перенос

Ученик: Признак: дробь с модулем, прямая через начало координат, вопрос про «нет общих точек».

Самостоятельно. $y = (4|x| - 1) / (|x| - 4x^2)$, наибольшее k , при котором нет общих точек с $y = kx$.

Задача 4. Кусочная функция

Условие. Постройте график функции $y = 3 - x$ при $x < 1$ и $y = x^2 - 4x + 1$ при $x \geq 1$. Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Функция задана двумя формулами. В точке $x = 1$ график разрывается. Прямая горизонтальная.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Что с концами промежутков?

Ученик: При строгом неравенстве конец выколот, при нестрогом закрашен.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Построить каждую формулу на своём промежутке. Найти ординаты концов. Двигать прямую. Проверить граничные значения.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Что даёт первая формула?

Ученик: Прямая $y = 3 - x$ при $x < 1$. При $x = 1$ получилось бы 2, но $x < 1$ строго: точка (1; 2) выколота. На этой части $y > 2$.

Учитель: Вторая?

Ученик: $y = (x - 2)^2 - 3$, вершина (2; -3), и $2 \geq 1$, она принадлежит графику. При $x = 1$: -2, точка (1; -2) закрашена.

Учитель: Двигаем прямую.

Ученик: Ниже -3 точек нет. На -3 одна: вершина. От -3 до -2 парабола даёт две точки ($x = 2 \pm \sqrt{(m + 3)}$) оба не меньше 1). Нужно проверить $m = -2$: корни 1 и 3, оба подходят, две точки. От -2 до 2 (включая 2) одна точка: правая ветвь параболы, а прямая такие значения не принимает. Выше 2 две: парабола и прямая.

Если ученик ответит: $m = 2$ не подходит, там выколота точка.

Учитель: Что происходит при $m = 2$ с параболой? Подставь: $(x - 2)^2 - 3 = 2$.

Ученик: Корни $2 \pm \sqrt{5}$; подходит $x = 2 + \sqrt{5}$, один. А выколота точка не считается. Значит, одна общая точка, $m = 2$ подходит.

Этап 5. Проверка и ответ

Ученик: $m = -2$ не подходит (две точки), $m = 2$ подходит (одна). Ответ: $m = -3$ и $-2 < m \leq 2$.

Этап 6. Перенос

Ученик: Признаки: две формулы с разными промежутками, нужно следить за строгостью неравенств.

Самостоятельно. $y = 7 - x$ при $x < 0$ и $y = x^2 - 4x + 3$ при $x \geq 0$, ровно одна общая точка с $y = m$.

Задача 5. Модуль трёхчлена и прямая $y = kx$

Условие. Постройте график функции $y = |x^2 - 4x|$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Этап 1. Что мы видим

Ученик: Модуль всего выражения: часть параболы под осью Ox отражается вверх. Прямая через начало координат.

Учитель: Что тут особенного про начало координат?

Ученик: Точка $O(0; 0)$ принадлежит и графику, и любой такой прямой. Значит, общая точка есть всегда. Нужно, чтобы других не было.

Этап 2. Как мы решаем подобное

Учитель: Правило для $y = |f(x)|$: часть графика над осью остаётся, часть под осью отражается вверх.

Этап 3. По какому алгоритму

Ученик: Построить $y = x^2 - 4x$, отразить часть под осью. Решить $f(x) = kx$ на каждом участке. Отобрать допустимые корни. Посчитать точки.

Этап 4. Решаем по алгоритму

Учитель: Парабола $y = x^2 - 4x$?

Ученик: Нули 0 и 4, вершина $(2; -4)$. При $0 < x < 4$ она ниже оси, эту часть отражаем: $y = -x^2 + 4x$, вершина $(2; 4)$.

Учитель: Решаем уравнение на участках $x \leq 0$ и $x \geq 4$.

Ученик: $x^2 - 4x = kx$, $x(x - 4 - k) = 0$, значит $x = 0$ или $x = 4 + k$. Корень $x = 4 + k$ допустим, если $k + 4 < 0$ (левая часть) или $k + 4 \geq 4$, то есть $k \geq 0$ (правая часть).

Учитель: Теперь $0 < x < 4$.

Ученик: $-x^2 + 4x = kx$, $x = 4 - k$. Допустим при $0 < 4 - k < 4$, то есть $0 < k < 4$.

Учитель: Считаю.

Ученик: $k < -4$: две точки. $-4 \leq k < 0$: одна, только O . $k = 0$: две, O и $(4; 0)$. $0 < k < 4$: три. $k \geq 4$: две.

| Если ученик ответит: $k = 0$ подходит, там одна точка.

| **Учитель:** Подставь $k = 0$. Это ось Ox . Где она пересекает график?

Ученик: В точках $(0; 0)$ и $(4; 0)$. Две. Значит, $k = 0$ не подходит.

Этап 5. Проверка и ответ

Ученик: $k = -4$: $x^2 - 4x = -4x$ даёт $x = 0$, других корней нет, одна точка. Ответ: $-4 \leq k < 0$.

Этап 6. Перенос

Ученик: Признаки: модуль трёхчлена, прямая $y = kx$ через начало координат.

Самостоятельно. $y = |x^2 - 6x|$, ровно одна общая точка с $y = kx$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

- $y = x|x| - |x| - 5x$: $m = -9$; $m = 4$.
- $y = (x^4 - 52x^2 + 576) / ((x - 4)(x + 6))$: $m = -25$; $m = -16$; $m = 24$.
- $y = (4|x| - 1) / (|x| - 4x^2)$: $k = -16$; $k = 0$; $k = 16$, наибольшее 16.
- $y = 7 - x$ ($x < 0$), $y = x^2 - 4x + 3$ ($x \geq 0$): $m = -1$ и $3 < m \leq 7$.
- $y = |x^2 - 6x|$: $-6 \leq k < 0$.

План урока на 60 минут (индивидуальное занятие)

- Разминка и проверка ДЗ, 5 мин. Устно: как раскрыть модуль, что такое выколота точка.
- Возврат к раннему материалу, 10 мин. Парабола: вершина, нули (2 задачи, например $y = x^2 - 6x + 5$).
- Новая тема, 15 мин. Разобрать задачу 1 или 2 по диалогу; ученик сам называет алгоритм.
- Отработка, 18 мин. Серия: самостоятельно из этого файла, от копии разобранной до новой.
- Смешанная практика, 8 мин. Три задачи из разных тем (в том числе №11).
- Итог и ДЗ, 4 мин.

Критерий освоения: ученик строит график с модулем или дробью и находит все значения параметра, 3 из 4 верно, с проверкой граничных значений.

Точка диагностики: задача 2 или 4; если не взял, остаться на ней и вернуться к выколотым точкам.

План домашнего задания

Карточка из 4 задач (ответы и ключевые точки проверки в конце карточки). Первые два дня: задачи 1–2; потом 3–4. Для трека С: все четыре; для А и В: №11 (соответствие графиков и формул) и тренажёр «новые числа».