

Математика, которую хочется пересказать

23 темы: исторический факт, откуда взялось, аналогия, жизнь, ловушка и мини-тест. Каждая тема занимает одну страницу А4.

ЧИСЛА И ДРОБИ

- | | |
|-------------------------------------|-------------|
| 1. Дроби: обыкновенные и десятичные | 3. Корни |
| 2. Степени | 4. Проценты |

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

- | | |
|-------------------------|-----------------------------------|
| 5. Линейные уравнения | 7. Неравенства |
| 6. Квадратные уравнения | 8. Системы уравнений и неравенств |

ФУНКЦИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

- | | |
|----------------------|-------------------------------|
| 9. Графики функций | 11. Арифметическая прогрессия |
| 10. Кусочная функция | 12. Геометрическая прогрессия |

ВЕРОЯТНОСТЬ И ЗАДАЧИ

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 13. Теория вероятностей | 15. Задачи на движение |
| 14. Задачи на смеси | |

ГЕОМЕТРИЯ

- | | |
|-------------------------|--------------------|
| 16. Треугольник | 20. Параллелограмм |
| 17. Медиана | 21. Квадрат |
| 18. Биссектриса | 22. Трапеция |
| 19. Высота треугольника | 23. Ромб |

Дроби: обыкновенные и десятичные

Что больше: $\frac{1}{3}$ пиццы или $\frac{1}{4}$ пиццы?

ОТВЕТ

$\frac{1}{3}$. Чем на большее число частей режешь, тем мельче кусок. Дробь — это дележ, а не обычное число.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Глаз Хора

В Древнем Египте почти все дроби записывали как доли с единицей сверху: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$. По одной из гипотез, их рисовали как части «Глаза Хора», хотя учёные спорят, так ли это было. Если сложить все шесть, выйдет $\frac{63}{64}$.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Слово «дробь» — от «дробить». Десятичные дроби придумал фламандец Симон Стевин в 1585 году: он написал книжку «Десятая», чтобы купцам было проще считать деньги и меры.

АНАЛОГИЯ

Дробь — это пицца. Знаменатель — на сколько кусков разрезали, числитель — сколько кусков взяли. $\frac{3}{8}$ — взяли 3 куска из 8. Десятичная дробь — такая же пицца, но всегда на 10, 100 или 1000 кусков, как рубль на 100 копеек.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Рецепты (полстакана муки), деньги (12,50 руб.), спорт (Усэйн Болт пробежал 100 м за 9,58 с), скидки, музыка: половинная нота, четвертная нота.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Одинаковые знаменатели: больше числитель — больше дробь.
- Одинаковые числители: больше знаменатель — меньше кусок.
- Дробь — это деление: $\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0,75$.

Пример: Сравни 0,3 и 0,25.

Решение: Допиши нули: 0,30 и 0,25. 30 сотых больше, чем 25 сотых. Значит $0,3 > 0,25$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

«0,25 больше 0,3, потому что 25 больше 3». Нет! Допиши нули справа, чтобы после запятой было поровну цифр, и только потом сравнивай.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Что больше?

☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{1}{8}$

2. Чему равно $\frac{3}{4}$ в виде десятичной дроби?

☐ 0,34 ☐ 0,75 ☐ 0,43

3. Что больше?

☐ 0,6 ☐ 0,45 ☐ Они равны

Ответы: 1) $\frac{1}{5}$. Чем больше кусков, тем они мельче. Пятая часть больше восьмой. 2) 0,75. $3 : 4 = 0,75$. 3) 0,6. 0,60 больше, чем 0,45.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Египтяне почти все дроби писали с единичкой сверху, а $\frac{1}{3}$ пиццы больше, чем $\frac{1}{4}$. Знал?

Степени

Сколько раз надо сложить пополам лист бумаги толщиной 0,1 мм, чтобы дотянуться до Луны?

ОТВЕТ

Всего 42 раза! Каждое сложение удваивает толщину: $0,1 \text{ мм} \cdot 2^{42} \approx 440\,000 \text{ км}$, а до Луны 384 000 км. Но на практике больше 12 раз сложить не удавалось.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ**Рекорд школьницы**

Считалось, что лист бумаги нельзя сложить пополам больше 7 раз. В 2002 году американская школьница Бритни Галливан сложила 12 раз рулон туалетной бумаги длиной около 1200 метров. Степень двойки растёт очень быстро.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Степень — короткая запись многократного умножения. Вместо $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ пишут 2^5 . Маленькую цифру сверху в современном виде ввёл Рене Декарт в 1637 году.

АНАЛОГИЯ

Степень — «сколько раз удвоил». Или рост силы в игре: каждый уровень удваивает её. 2^3 — три удвоения: 1, 2, 4, 8.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Площадь квадрата (a^2), объём куба (a^3), число 10^6 — миллион, размеры файлов (килобайт, мегабайт — степени двойки), масса Земли в научной записи.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- a^n — число a , умноженное само на себя n раз. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
- Любое число (кроме 0) в степени 0 равно 1. Степень -1 переворачивает: $2^{-1} = 1/2$.
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. При умножении степени складываются.

Пример: Вычисли $2^3 \cdot 2^2$.

Решение: $2^{3+2} = 2^5 = 32$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

2^3 — это не $2 \cdot 3 = 6$, а $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. И $(-3)^2 = 9$, а $-3^2 = -9$: минус без скобок не возводится.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. $2^5 = ?$

☐ 10 ☐ 25 ☐ 32

2. $5^0 = ?$

☐ 0 ☐ 1 ☐ 5

3. $(-2)^2 = ?$

☐ -4 ☐ 4 ☐ -2

Ответы: 1) 32. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. 2) 1. Любое число, кроме нуля, в нулевой степени равно 1. 3) 4. $(-2) \cdot (-2) = 4$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

В теории лист бумаги, сложенный пополам 42 раза, дотянулся бы до Луны. Это сила степеней!

Корни

Какой стороны должен быть квадратный участок площадью 2 м^2 ? Ответ нельзя записать цифрами до конца.

ОТВЕТ

$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ Цифры идут без конца и без повторов.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ**Табличка за 3700 лет**

На вавилонской глиняной табличке YBC 7289 нарисован квадрат с диагоналями, а рядом число, которое равно $\sqrt{2}$ примерно 1,41421. Писец вычислил это почти точно за 3700 лет до калькуляторов.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Знак корня $\sqrt{}$ впервые напечатал немецкий математик Кристоф Рудольф в 1525 году. Считается, что знак напоминает букву *r* от латинского *radix*, «корень» (так думал Эйлер), но точное происхождение учёные не знают.

АНАЛОГИЯ

Корень — «обратный ход» к квадрату. Квадрат: знаешь сторону, найди площадь ($5^2 = 25$). Корень: знаешь площадь, найди сторону ($\sqrt{25} = 5$). Как «вперёд» и «назад» в игре.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Плитка и паркет (какая сторона у квадрата площадью 9 м^2), расчёт времени падения предмета, теорема Пифагора, диагональ экрана телефона.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- $\sqrt{a}$ — неотрицательное число, которое в квадрате даёт a . $\sqrt{49} = 7$.
- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Например, $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.
- Из отрицательного числа в школе корень не извлекаем.

Пример: Найди $\sqrt{144} - \sqrt{9}$.

Решение: $12 - 3 = 9$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

$\sqrt{(9 + 16)}$ не равен $\sqrt{9} + \sqrt{16}$. Слева $\sqrt{25} = 5$, справа $3 + 4 = 7$. Корень «не раскрывается» через сумму. И $\sqrt{16} = 4$, а не ± 4 .

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. $\sqrt{81} = ?$

☐ 9 ☐ 8,1 ☐ ± 9

2. Между какими целыми числами лежит $\sqrt{20}$?

☐ 3 и 4 ☐ 4 и 5 ☐ 5 и 6

3. $\sqrt{16} + \sqrt{9} = ?$

☐ 5 ☐ 7 ☐ 25

Ответы: 1) $9 \cdot 9 = 81$, а корень берём неотрицательный. 2) $4 \text{ и } 5$. $16 < 20 < 25$, значит $4 < \sqrt{20} < 5$. 3) $4 + 3 = 7$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Вавилонский писец около 3700 лет назад вычислил $\sqrt{2}$ с точностью до пяти знаков.

Проценты

Товар подорожал на 20%, а потом подешевел на 20%. Вернулась ли цена к прежней?

ОТВЕТ

Нет. Было 100, стало 120, потом 96. Второй процент считают от новой цены, поэтому результат другой.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Налог в 1%

Римский император Август ввёл налог в одну сотую часть стоимости товаров, проданных на аукционах. Слово «процент» — от латинского pro centum, «на сотню». А значок % появился из сокращённой записи итальянского per cento.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Римские ростовщики брали плату с долга в сотых долях. Так родилась идея «на сотню». Потом проценты вошли в торговлю, налоги и банки.

АНАЛОГИЯ

Процент — одна клеточка из ста. Нарисуй квадрат 10 на 10: 1% — одна клеточка, 50% — половина клеток, 25% — четверть.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Скидки в магазине, заряд телефона, чаевые, кэшбэк, проценты по вкладу и кредиту, доля голосов на выборах.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- $1\% = 0,01$. Чтобы найти $p\%$ от числа, умножь число на $p / 100$.
- Подорожало на $p\%$: умножь на $(1 + p/100)$. Подешевело на $p\%$: умножь на $(1 - p/100)$.
- Сколько процентов a составляет от b : $(a : b) \cdot 100\%$.

Пример: Куртка 3000 руб., скидка 20%. Новая цена?

Решение: $3000 \cdot 0,8 = 2400$ руб. Или $3000 - 600 = 2400$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

+20% и потом -20% не вернут цену: второй процент считают уже от новой цены. $100 \rightarrow 120 \rightarrow 96$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. 10% от 250?

☐ 25 ☐ 10 ☐ 2,5

2. Цена 500 руб., скидка 10%. Сколько платить?

☐ 450 ☐ 490 ☐ 400

3. Из 25 учеников 5 написали на пятёрку. Сколько это процентов?

☐ 5% ☐ 20% ☐ 25%

Ответы: 1) 25. $250 \cdot 0,1 = 25$. 2) 450. $500 - 50 = 450$. 3) 20%. $5 : 25 = 0,2$, то есть 20%.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Слово «процент» значит «на сотню». А +20% и потом -20% — это не ноль!

Линейные уравнения

Знак « $=$ » — две параллельные палочки, потому что «ничто не бывает более равным». Но как решить уравнение с иксом?

ОТВЕТ

Уравнение — это весы. Что делаешь с одной чашей, то же делай с другой. Так x остаётся один.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Откуда знак « $=$ »

Знак равенства придумал в 1557 году валлийский математик Роберт Рекорд. Он объяснил: ничто не может быть более равным, чем две параллельные линии. До него писали слово «равно» целиком.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Слово «алгебра» — от арабского «аль-джабр» («восполнение»): так называлась книга учёного Аль-Хорезми, которую он написал около 820 года. От его имени пошло и слово «алгоритм».

АНАЛОГИЯ

Весы. Слева $3x + 5$, справа 20. Чтобы весы остались равными, убираем 5 с обеих чаш, потом делим обе чаши на 3.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Сколько тетрадей купить на 300 рублей, если ручка стоит 40? Через сколько минут придёт автобус? Сколько откладывать в месяц? Любое «сколько?» можно записать уравнением.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Слагаемое переносим через « $=$ » с противоположным знаком.
- Обе части можно умножить или разделить на одно и то же число (не на 0).
- В конце подставь ответ и проверь.

Пример: $3x + 5 = 20$

Решение: $3x = 20 - 5 = 15$, $x = 15 : 3 = 5$.

Проверка: $3 \cdot 5 + 5 = 20$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Перенёс число и забыл поменять знак. Было $+5$ — стало -5 . Правило весов: сделал с одной стороной — сделай то же с другой.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. $x + 7 = 12$. $x = ?$

☐ 19 ☐ 5 ☐ -5

2. $2x = 18$. $x = ?$

☐ 9 ☐ 16 ☐ 36

3. $5x - 4 = 21$. $x = ?$

☐ 5 ☐ 3,4 ☐ 25

Ответы: 1) 5 . $x = 12 - 7 = 5$. 2) 9 . $18 : 2 = 9$. 3) 5 . $5x = 25$, $x = 5$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Знак « $=$ » придумали в 1557 году: две параллельные палочки — самое равное, что есть.

Квадратные уравнения

Мяч летит по дуге. Когда он упадёт? Это уравнение с x^2 , и у него может быть 2 ответа, 1 или ни одного.

ОТВЕТ

Сколько ответов, подскажет число D (дискриминант): D больше нуля — два, D равно нулю — один, D меньше нуля — ни одного.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Задачам 4000 лет

Вавилонские писцы около 4000 лет назад уже решали задачи, которые мы записываем квадратными уравнениями. Индийский учёный Брахмагупта в VII веке дал первое явное правило решения, а буквы для коэффициентов в уравнениях ввёл француз Франсуа Виет в XVI веке.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

«Дискриминант» — от латинского *discriminare*, «различать»: он различает, сколько корней. «Квадратное» уравнение — потому что в нём есть x^2 , площадь квадрата.

АНАЛОГИЯ

Парабола — путь брошенного мяча. Корни — места, где мяч касается земли ($y = 0$): точка вылета и точка падения. А бывает, что мяч вообще не касается земли ($D < 0$).

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Струя фонтана, арка моста, спутниковая тарелка и фары (форма — парабола), прыжок спортсмена, расчёт площади участка.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$.
- $D = b^2 - 4ac$, потом $x = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a)$.
- $D > 0$ — два корня, $D = 0$ — один, $D < 0$ — корней нет.

Пример: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Решение: $D = 25 - 24 = 1$. $x = (5 \pm 1) / 2$, значит $x = 3$ или $x = 2$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Забыть, что перед $\sqrt{D}$ стоит « $\pm$ ». И делить на $2a$ надо всё выражение целиком, а не только корень.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Чему равно D для $x^2 + 2x + 5 = 0$?

☐ -16 ☐ 24 ☐ 16

2. Сколько корней при $D = 0$?

☐ Ни одного ☐ Один ☐ Два

3. Корни $x^2 - 9 = 0$?

☐ 3 ☐ -3 и 3 ☐ 9

Ответы: 1) -16. $4 - 20 = -16$, корней нет. 2) Один. Парабола касается оси в одной точке. 3) -3 и 3. $x^2 = 9$, значит $x = 3$ или $x = -3$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Квадратные уравнения решали ещё в Вавилоне 4000 лет назад. А мяч летит по параболе!

Неравенства

Почему на аттракционе написано «рост от 120 см»? Это неравенство. И почему при умножении на минус знак переворачивается?

ОТВЕТ

Минус разворачивает числовую прямую: $2 < 5$, но $-2 > -5$. Что было больше, стало меньше.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Знаки $<$ и $>$

Знаки «меньше» и «больше» обычно приписывают английскому математику Томасу Харриоту. Они появились в его книге, которую издали в 1631 году, уже после его смерти. Историки спорят, придумал ли знаки сам Харриот. До этого писали словами.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Запомнить просто: острый конец знака смотрит на меньшее число, раскрытый — на большее. Как рот крокодила, который хочет съесть число побольше.

АНАЛОГИЯ

Ограничитель на аттракционе: рост ≥ 120 см. Подходят все, кто выше или равен. Решение неравенства — не одно число, а целая «зона допуска».

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Скорость ≤ 60 км/ч, лифт до 400 кг, возраст 12+, на карте должно хватать денег ($\geq$ цены), заряд батареи $> 20\%$.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Решаем как уравнение, но ответ — промежуток, а не число.
- Умножил или поделил на отрицательное — знак разворачивается.
- Строгий знак ($<$, $>$) — точка выколота. Нестрогий ($\leq$, $\geq$) — закрашена.

Пример: $-2x > 6$

Решение: Делим на -2 и разворачиваем знак:
 $x < -3$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Разделил на минус и не развернул знак. Проверка: возьми число из ответа (-4) и подставь: $-2 \cdot (-4) = 8$, а $8 > 6$.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. $x + 3 > 5$. Решение?

☐ $x > 2$ ☐ $x < 2$ ☐ $x > 8$

2. $-x < 4$. Решение?

☐ $x < -4$ ☐ $x > -4$ ☐ $x > 4$

3. Входит ли 5 в решение $x \geq 5$?

☐ Да ☐ Нет

Ответы: 1) $x > 2$. $x > 5 - 3 = 2$. 2) $x > -4$. Умножаем на -1 и разворачиваем знак: $x > -4$. 3) Да. Знак $\geq$ допускает равенство.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Знаки $<$ и $>$ обычно приписывают Томасу Харриоту. Острый конец смотрит на меньшее число!

Системы уравнений и неравенств

В клетке сидят фазаны и кролики. Всего 35 голов и 94 ноги. Сколько кого? Эту задачу придумали в Китае больше 1500 лет назад.

ОТВЕТ

23 фазана и 12 кроликов. Две «подсказки» — два уравнения — и ответ найден.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Фазаны и кролики

Задача про фазанов и кроликов записана в китайском трактате «Сунь-цзы суань цзин». А ещё раньше, в «Девяти главах о математическом искусстве», китайцы решали системы уравнений, расставляя числа в таблицу. Это почти метод Гаусса.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Система нужна, когда неизвестных несколько. Две неизвестные — две подсказки (уравнения). Система неравенств — когда одновременно должны выполняться несколько ограничений.

АНАЛОГИЯ

Детектив: одной улики мало. Уравнение $x + y = 10$ подходит многим парам чисел. Вторая улика оставляет одну. В неравенствах пройдёт только тот, кто подходит под ВСЕ условия сразу.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Составить меню на деньги и калории, подобрать тариф по минутам и гигабайтам, купить тетради и ручки на заданную сумму, составить расписание.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Подстановка: выразил одну неизвестную через другую и подставил во второе уравнение.
- Сложение: сложи (или вычти) уравнения так, чтобы одна неизвестная исчезла.
- Система неравенств: ответ — общая часть решений всех неравенств.

Пример: $x + y = 10$ и $x - y = 2$

Решение: Сложим: $2x = 12$, $x = 6$, тогда $y = 4$.

Проверка: $6 + 4 = 10$ и $6 - 4 = 2$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Найти x и забыть найти y . Не проверить ответ в обоих уравнениях. В неравенствах взять не общую часть, а всё подряд.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. $x + y = 7$ и $x - y = 1$. Чему равно x ?

☐ 4 ☐ 3 ☐ 6

2. Решение системы $x > 2$ и $x < 5$ — это...

☐ числа от 2 до 5 ☐ все числа ☐ ничего

3. Сколько ног у 3 кроликов и 2 фазанов?

☐ 16 ☐ 14 ☐ 18

Ответы: 1) 4. Сложим: $2x = 8$, $x = 4$. 2) числа от 2 до 5. Нужны числа, которые больше 2 и одновременно меньше 5. 3) 16. $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Задачу про фазанов и кроликов решали в Китае больше 1500 лет назад. Попробуй: 35 голов, 94 ноги!

Графики функций

Как нарисовать картинку, в которую превращается любая формула? И при чём тут муха на потолке?

ОТВЕТ

Каждая пара чисел $(x; y)$ — это точка на листе. Много точек — получается линия. Эта линия и есть график.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Муха Декарта

Легенда: французский учёный Рене Декарт лежал в постели и смотрел на муху на потолке. Он понял, что место мухи можно назвать двумя числами: расстояния до двух стен. Так, по легенде, родилась система координат. Её до сих пор называют декартовой.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

В XVII веке математики соединили геометрию (картинки) и алгебру (формулы). До этого они жили отдельно. Теперь любую формулу можно увидеть как линию.

АНАЛОГИЯ

График — это «морской бой» для формулы. В морском бое клетка называется двумя символами, например Б5. В графике — двумя числами $(x; y)$. Формула $y = 2x$ говорит: «чтобы найти y , умножь x на 2».

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

График температуры в приложении погоды, курс валюты, пульс в больнице, скорость на спидометре, рост числа просмотров у блогера.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- В формуле $y = kx + b$ число k — крутизна горки. Больше k — круче вверх. Минус — вниз.
- Число b — высота, на которой линия пересекает ось y .
- Чтобы найти точку: выбери x , подставь в формулу и получи y .

Пример: Построй $y = 2x + 1$.

Решение: $x = 0$ даёт $y = 1$; $x = 1$ даёт $y = 3$. Отметь точки $(0; 1)$ и $(1; 3)$ и проведи прямую.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Координаты читают так: сначала x (вдоль, по горизонтали), потом y (вверх). Сначала идёшь по дороге до дома, потом поднимаешься на этаж.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Где график $y = 3x - 2$ пересекает ось y ?

☐ $(0; -2)$ ☐ $(0; 3)$ ☐ $(-2; 0)$

2. Что значит минус у k , например $y = -x$?

☐ Линия идёт вверх ☐ Линия идёт вниз, как спуск ☐ Линия горизонтальна

3. Лежит ли точка $(2; 5)$ на графике $y = 2x + 1$?

☐ Да ☐ Нет

Ответы: 1) $(0; -2)$. При $x = 0$ получаем $y = -2$. 2) Линия идёт вниз, как спуск. Отрицательное k — линия спускается слева направо. 3) Да. $2 \cdot 2 + 1 = 5$, значит лежит.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Систему координат, по легенде, придумали из-за мухи на потолке. Любая формула — это картинка!

Кусочная функция

Почему поездка на такси «до 3 км» стоит одинаково, а дальше цена растёт? Это не одна формула, а две.

ОТВЕТ

Кусочная функция — правило с разными формулами на разных участках. Как тариф: пока ты в одной зоне, считают так, перешёл в другую — иначе.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Модуль придумали в 1841

Знак модуля $| |$ ввёл немецкий математик Карл Вейерштрасс в 1841 году. Модуль — самая известная кусочная функция: $|x|$ равен x , если число положительное, и $-x$, если отрицательное. Он всё «отражает» в плюс. График похож на букву V.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Люди давно живут по правилам-кусочкам: налоги, тарифы связи, цены на детские и взрослые билеты. Математики записали такие правила одной фигурной скобкой.

АНАЛОГИЯ

Светофор: красный — стой, зелёный — иди. Что делать, зависит от того, в каком «кусочке» ты сейчас. Фигурная скобка $\{$ — это светофор для формул.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Тариф такси, тариф мобильной связи, ступенчатый налог, цена билета в зоопарк, парковка: первый час бесплатно, дальше по часам.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Смотри, в какой промежуток попал x , и бери формулу только оттуда.
- На границе смотри на знак $\leq$ или $<$: он решает, чья там формула.
- График — несколько кусочков линий на одном чертеже.

Пример: $y = x$ при $x \leq 2$ и $y = 4$ при $x > 2$. Найди $y(5)$ и $y(1)$.

Решение: 5 больше 2, берём вторую формулу: $y = 4$. $1 \leq 2$, берём первую: $y = 1$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Подставлять число в обе формулы сразу. Нельзя: у каждого x «своя» формула, та, что подходит по условию.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. $y = |x|$. Чему равно $y(-7)$?

☐ -7 ☐ 7 ☐ 0

2. $y = x$ при $x < 0$ и $y = 5$ при $x \geq 0$. Найди $y(0)$.

☐ 0 ☐ 5 ☐ Не существует

3. Зачем в тарифе такси два кусочка?

☐ Чтобы запутать ☐ Цена считается по-разному на разных расстояниях ☐ Так проще печатать

Ответы: 1) 7. Модуль убирает минус: $|-7| = 7$. 2) 5. Ноль попадает во второй кусок ($x \geq 0$), там $y = 5$. 3) Цена считается по-разному на разных расстояниях. Первые километры входят в посадку, потом платишь за каждый.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Знак модуля придумали только в 1841 году, а такси считает цену как кусочная функция.

Арифметическая прогрессия

По легенде, школьнику велели сложить все числа от 1 до 100. Он справился за минуту. Как?

ОТВЕТ

Он сложил числа парами: $1 + 100$, $2 + 99$, $3 + 98$... Каждая пара даёт 101, пар 50. Итого $50 \cdot 101 = 5050$.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Маленький Гаусс

По легенде, учитель Карла Гаусса, чтобы занять класс, велел сложить числа от 1 до 100. Маленький Гаусс почти сразу написал 5050. Позже его называли «королём математиков». Историки считают этот рассказ преданием, а сам приём настоящий.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

В египетском папирусе Ринда (ему около 3600 лет) есть задача: разделить 100 хлебов между пятью людьми так, чтобы доли шли «со ступенькой». Это арифметическая прогрессия. Слово «прогрессия» — «движение вперёд».

АНАЛОГИЯ

Лестница. Каждая ступенька выше предыдущей на одно и то же число сантиметров. Первая ступень — a_1 , шаг — d . Двадцатая ступень равна первой плюс 19 шагов.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Ряды в кинотеатре (в каждом на 2 места больше), этажи дома, копилка «каждый день на 10 рублей больше», тренировка «каждую неделю на 1 км дальше».

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Каждое следующее число больше предыдущего на одно и то же d (шаг).
- n -е число: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
- Сумма: $S_n = (a_1 + a_n) \cdot n / 2$. Это приём Гаусса: пары с одинаковой суммой.

Пример: 5, 8, 11, ... Найди десятый член.

Решение: Шаг $d = 3$. $a_{10} = 5 + 9 \cdot 3 = 32$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Прибавлять шаг n раз вместо $n - 1$. Первое число уже стоит на месте, до n -го шагов на один меньше.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Найди шаг d : 7, 12, 17, 22.

☐ 4 ☐ 5 ☐ 7

2. $a_1 = 2$, $d = 3$. Чему равно a_5 ?

☐ 14 ☐ 17 ☐ 15

3. Сколько будет $1 + 2 + 3 + \dots + 10$?

☐ 50 ☐ 55 ☐ 60

Ответы: 1) 5. $12 - 7 = 5$. 2) 14. $2 + 4 \cdot 3 = 14$. 3) 55. Пар 5, каждая даёт 11: $5 + 11 = 55$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

По легенде, маленький Гаусс сложил числа от 1 до 100 за минуту. Секрет — складывать парами.

Геометрическая прогрессия

По легенде, изобретатель шахмат попросил награду: на первую клетку 1 зерно, на вторую 2, на третью 4 и так далее. Царь засмеялся. Зря. Сколько получилось?

ОТВЕТ

18 446 744 073 709 551 615 зёрен. По грубой прикидке, это сотни лет мирового урожая риса.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Шахматы и зёрна

Старая легенда: на каждой следующей клетке зёрен вдвое больше. На 64-й клетке будет $2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ зёрен. Всё вместе — 18 446 744 073 709 551 615. Ни один царь не смог бы расплатиться.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Название «геометрическая» не случайно: у положительных чисел каждый член — среднее геометрическое своих соседей. А рост «в несколько раз» мы видим в размножении бактерий и в процентах на проценты.

АНАЛОГИЯ

Снежный ком. Катишь вниз, и он с каждым оборотом становится в 2 раза больше. Или слух: ты рассказал двум друзьям, каждый ещё двум — и скоро знает вся школа.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Размножение бактерий, вирусный ролик, рост денег по сложным процентам, цепочки репостов, мяч, который отскакивает всё ниже.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Каждое следующее число получают умножением на одно и то же q (знаменатель).
- n -й член: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.
- Если $q > 1$ — число взрывается в росте. Если $0 < q < 1$ — затухает.

Пример: 3, 6, 12, ... Найди шестой член.

Решение: $q = 2$. $b_6 = 3 \cdot 2^5 = 96$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Путать с арифметической. Там прибавляют, тут умножают. 2, 4, 6, 8 — арифметическая. 2, 4, 8, 16 — геометрическая.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Найди знаменатель q : 5, 15, 45.

☐ 10 ☐ 3 ☐ 5

2. $b_1 = 1$, $q = 2$. Чему равно b_4 ?

☐ 4 ☐ 8 ☐ 16

3. Какая из этих последовательностей геометрическая?

☐ 1, 3, 5, 7 ☐ 1, 3, 9, 27 ☐ 2, 4, 6, 8

Ответы: 1) 3. $15 : 5 = 3$. 2) 8. $1 \cdot 2^3 = 8$. 3) 1, 3, 9, 27. Каждое число умножают на 3.

РАССКАЖИ ДРУГУ

По легенде, за шахматы изобретатель попросил зёрна: 1, 2, 4, 8... Получилось больше 18 квинтиллионов!

Теория вероятностей

Монета 5 раз подряд выпала орлом. Какова вероятность, что следующий раз будет решка?

ОТВЕТ

Ровно $1/2$, как всегда. Монета не помнит, что было раньше. Кто думает иначе, попал в «ошибку игрока».

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ**Спор, который родил науку**

В 1654 году французский игрок, кавалер де Мере, спросил математика Блеза Паскаля: как честно поделить ставки, если игру прервали. Паскаль начал переписку с Пьером Ферма. Из этих писем и родилась теория вероятностей.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Азартные игры были всегда, а наука о случайности появилась только в XVII веке. Слово «вероятность» — от «вера, вероятно». Сначала считали шансы в играх, теперь — прогноз погоды и лекарства.

АНАЛОГИЯ

Вероятность — доля «хороших» исходов среди всех. В пакете 10 конфет: 3 шоколадные и 7 карамельных. Достанешь наугад: шанс шоколадной — 3 из 10, то есть 0,3.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Прогноз «30% дождя», страховка, лотерея, брак на заводе, шанс попасть в баскетболе, игры с кубиком.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- P = благоприятные исходы ÷ все возможные исходы.
- Вероятность всегда от 0 (невозможно) до 1 (точно).
- Вероятность «не случится» = $1 - \text{вероятность «случится»}$.

Пример: Кубик бросили один раз. Какова вероятность числа больше 4?

Решение: Подходят 5 и 6 — это 2 исхода из 6. $P = 2/6 = 1/3$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Ошибка игрока: «после 5 орлов подряд должна выпасть решка». Нет, монета не помнит. Каждый бросок — как первый.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)**1. Шанс орла на монете?**

☐ $1/2$ ☐ $1/3$ ☐ 1

2. В мешке 2 красных и 8 синих шаров. Шанс достать красный?

☐ $1/5$ ☐ $1/8$ ☐ $2/8$

3. Прогноз: вероятность дождя 0,9. Брать зонт?

☐ Да, дождь очень вероятен ☐ Нет, дождя не будет ☐ Всё равно

Ответы: 1) $1/2$. Из двух исходов один подходит. 2) $1/5$. 2 из 10, то есть $1/5$. 3) Да, дождь очень вероятен. 0,9 — это почти наверняка.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Всю теорию вероятностей запустили письма Паскаля и Ферма про спор о ставках в игре.

Задачи на смеси

Как, по легенде, Архимед понял, что царская корона не из чистого золота, и при чём тут ванна?

ОТВЕТ

Он сравнил, сколько воды вытесняет корона и кусок чистого золота той же массы. Это тоже задача про смесь: золото плюс серебро.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Эврика!

Царь Гиерон велел сделать корону из золота и подозревал, что мастер подмешал серебро. Говорят, Архимед придумал проверку, когда залез в ванну и заметил, как поднялась вода. Он закричал «Эврика!» — «Нашёл!».

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Задачи на смеси ещё называют задачами на сплавы и растворы. Торговцы, аптекари и мастера всегда смешивали металлы, вино и лекарства и должны были знать, сколько чего получилось.

АНАЛОГИЯ

Какао с молоком. Одна ложка какао в маленьком стакане — тёмно, в большом — светло. Какао то же самое, а «крепость» разная: зависит от всего объёма.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Золото 585-й пробы (в украшении 58,5% золота), уксус 9%, зелёнка, сок из концентрата, кофе с молоком, бассейн с хлоркой.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Вещества = масса смеси × концентрация (в долях).
- Складываются МАССЫ и КОЛИЧЕСТВО вещества. Проценты не складываются.
- Новая концентрация = всё вещество ÷ вся смесь.

Пример: Смешали 200 г 10% сиропа и 300 г 30% сиропа. Какая концентрация?

Решение: Сахара: $20 + 90 = 110$ г. Смеси: 500 г. $110 : 500 = 0,22$, то есть 22%.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

$10\% + 30\% = 40\%$? Нет! Это как сложить крепость двух чаёв. Складывай граммы вещества, потом дели на общий вес.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. В 200 г 5%-го раствора соли. Сколько соли?

☐ 5 г ☐ 10 г ☐ 20 г

2. Смешали 100 г воды и 100 г 20%-го раствора. Что получилось?

☐ 20% ☐ 10% ☐ 5%

3. Смешали 10%-й и 30%-й растворы. Может ли выйти 40%?

☐ Да ☐ Нет, только между 10% и 30% ☐ Иногда

Ответы: 1) 10 г. $200 \cdot 0,05 = 10$ г. 2) 10%. Вещества 20 г на 200 г смеси: 10%. 3) Нет, только между 10% и 30%. Смесь всегда между двумя исходными концентрациями.

РАССКАЖИ ДРУГУ

По легенде, Архимед проверял корону царя как задачу на смесь: золото плюс серебро. И закричал «Эврика!».

Задачи на движение

Ахиллес бежит в 10 раз быстрее черепахи, но древний грек «доказал», что он её никогда не догонит. В чём подвох?

ОТВЕТ

Отрезки, которые должен пробежать Ахиллес, становятся всё короче, а их сумма конечна. Время встречи просто считается по формуле.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Ахиллес и черепаха

Парадокс придумал философ Зенон Элейский в V веке до н. э. Он говорил: пока Ахиллес добежит до места, где была черепаха, она уползёт чуть дальше. И так без конца. Математика потом показала: сумма бесконечно убывающих шажков конечна.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Главная формула: путь = скорость × время, $s = v \cdot t$. Из неё выводятся ещё две: $v = s : t$ и $t = s : v$.

АНАЛОГИЯ

Треугольник s, v, t . Закрой пальцем то, что ищешь, и увидишь формулу: закрыл s — получилось $v \cdot t$, закрыл v — получилось $s : t$.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Навигатор считает время в пути, ты прикидываешь, успеешь ли на поезд, лодка идёт по течению реки, бегун держит темп.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- $s = v \cdot t$, $v = s : t$, $t = s : v$.
- Навстречу: скорости складывают. Вдогонку: скорости вычитают.
- По течению: скорость лодки + течение.
Против: скорость лодки – течение.

Пример: Два пешехода идут навстречу, 4 и 6 км/ч, между ними 20 км. Через сколько встретятся?

Решение: Скорость сближения $4 + 6 = 10$ км/ч. $t = 20 : 10 = 2$ ч.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Средняя скорость — не среднее арифметическое. Туда 60 км/ч, обратно 40 км/ч: средняя не 50, а 48 км/ч. Считай весь путь ÷ всё время.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. 90 км за 3 часа. Скорость?

☐ 30 км/ч ☐ 270 км/ч ☐ 45 км/ч

2. Лодка 10 км/ч, течение 2 км/ч. Скорость по течению?

☐ 8 км/ч ☐ 12 км/ч ☐ 20 км/ч

3. Навстречу идут 5 и 7 км/ч, между ними 24 км. Время встречи?

☐ 2 ч ☐ 4 ч ☐ 1 ч

Ответы: 1) 30 км/ч. $90 : 3 = 30$. 2) 12 км/ч. $10 + 2 = 12$. 3) 2 ч. $24 : 12 = 2$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Ахиллес всё-таки догонит черепаху. Проверь по формуле: время = расстояние : скорость сближения.

Треугольник

Почему мосты, краны и вышки собирают из треугольников, а не из квадратов?

ОТВЕТ

Треугольник жёсткий: если длины сторон заданы, его нельзя «перекосить». А квадрат из палочек легко складывается в ромб.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Верёвка с узлами

По одной из версий, древние строители получали прямой угол верёвкой с 12 узлами: делили её на части 3, 4 и 5. Выходил прямоугольный треугольник, и стены получались ровными. Его называют египетским. Историки спорят, подтверждают ли это сохранившиеся источники.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Евклид в «Началах» (около 300 лет до н. э.) доказал, что сумма углов треугольника равна 180° . Слово «треугольник» — три угла.

АНАЛОГИЯ

Три палочки на гвоздиках: треугольник не сложится. Четыре палочки — сложится. Поэтому треугольник называют жёсткой фигурой.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Стропила крыши, велосипедная рама, Эйфелева башня, дорожные знаки, ферма моста, ёлочка из треугольников.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Сумма углов треугольника — 180° .
- Каждая сторона меньше суммы двух других. Из 2, 3 и 7 треугольник не сложить.
- Площадь: $S = \frac{1}{2} \cdot \text{основание} \cdot \text{высота}$.

Пример: Два угла 50° и 60° . Чему равен третий?

Решение: $180 - 50 - 60 = 70^\circ$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Думать, что из любых трёх отрезков выйдет треугольник. Проверь: самая длинная сторона должна быть меньше суммы двух других.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Углы 90° и 35° . Третий угол?

☐ 45° ☐ 55° ☐ 65°

2. Есть ли треугольник со сторонами 3, 4, 8?

☐ Да ☐ Нет

3. Площадь при основании 10 и высоте 6?

☐ 60 ☐ 30 ☐ 16

Ответы: 1) 55° . $180 - 90 - 35 = 55$. 2) Нет. $3 + 4 = 7$, а $7 < 8$. 3) 30. $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Мосты и краны делают из треугольников, потому что треугольник нельзя перекосить.

Медиана

Вырежи треугольник из картона. Есть одна волшебная точка, в которой он держится на кончике карандаша. Где она?

ОТВЕТ

В точке пересечения медиан. Это центр тяжести треугольника.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ**Центр тяжести**

Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке. Она делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Центр тяжести тел ещё в III веке до н. э. изучал Архимед.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

«Медиана» — от латинского *mediana*, «средняя». Она идёт от вершины к середине противоположной стороны.

АНАЛОГИЯ

Медиана — обезьяна: прыгает по углам и делит сторону пополам. Три медианы-обезьянки всегда встречаются в одной точке — центре тяжести.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Где подпереть треугольную полку, чтобы она не упала. Как найти центр тяжести у дорожного знака или консоли.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны.
- В треугольнике три медианы, и они пересекаются в одной точке.
- Точка пересечения делит каждую медиану $2 : 1$ от вершины.

Пример: Медиана равна 12 см. Сколько от вершины до точки пересечения?

Решение: Это $\frac{2}{3}$ от 12, то есть 8 см.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Путать с биссектрисой и высотой. Медиана делит СТОРОНУ пополам, биссектриса делит УГОЛ, а высота падает под прямым углом.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)**1. Что делит медиана пополам?**

☐ Угол ☐ Противоположную сторону ☐ Периметр

2. Сколько медиан в треугольнике?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

3. Медиана равна 9. Точка пересечения делит её на...

☐ 6 от вершины и 3 ☐ 3 от вершины и 6 ☐ 4,5 и 4,5

Ответы: 1) Противоположную сторону. Медиана идёт в середину противоположной стороны. 2) 3. По одной из каждой вершины. 3) 6 от вершины и 3. $2 : 1$ от вершины.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Треугольник из картона держится на карандаше в точке пересечения медиан. Проверь!

Биссектриса

Как проложить тропинку так, чтобы она шла на одинаковом расстоянии от двух дорог?

ОТВЕТ

По биссектрисе угла между дорогами: каждая её точка одинаково далеко от обеих сторон угла.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Угол на три части нельзя

Делить угол пополам циркулем и линейкой умели ещё древние греки. А разделить угол на три равные части циркулем и линейкой нельзя. Это доказал француз Пьер Ванцель только в 1837 году, после двух тысяч лет попыток.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

«Биссектриса» — от латинских *bis* («дважды») и *sectrix* («рассекающая»): рассекающая пополам.

АНАЛОГИЯ

Крыса Биссектриса бежит по углам и делит угол пополам, как нож делит пирог ровно на две части. Её девиз: делит угол и сердце пополам.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Рамка для картины: планки спиливают под 45° , и это биссектриса прямого угла. Разметка в шитье и столярке.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Биссектриса делит угол пополам.
- Каждая точка биссектрисы одинаково удалена от сторон угла.
- Три биссектрисы треугольника пересекаются в центре вписанной окружности.

Пример: Угол 70° . На какие углы его делит биссектриса?

Решение: На два угла по 35° .

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Думать, что биссектриса делит пополам противоположную сторону. Нет, она делит угол. Сторону пополам делит медиана.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Угол 90° . Биссектриса делит его на...

☐ 45° и 45° ☐ 30° и 60° ☐ 90° и 0°

2. Центр вписанной окружности лежит на пересечении...

☐ медиан ☐ биссектрис ☐ высот

3. Расстояния от точки на биссектрисе до сторон угла...

☐ Разные ☐ Одинаковые ☐ Всегда равны 0

Ответы: 1) 45° и 45° . Пополам: $90 : 2 = 45$. 2) биссектрис. Центр одинаково далёк от всех сторон. 3) Одинаковые. Это главное свойство биссектрисы.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Угол можно разделить на две части циркулем и линейкой, а на три нельзя. Это доказано!

Высота треугольника

Пирамида высотой 140 метров. Как греческий мудрец измерил её без лестницы, стоя на песке?

ОТВЕТ

Он дождался момента, когда тень человека равна его росту. Тогда и тень пирамиды (с поправкой на половину основания) равна её высоте.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Фалес и пирамида

Рассказывают, что Фалес Милетский (около 600 года до н. э.) в Египте измерил высоту пирамиды Хеопса по тени. Он выбрал момент, когда его собственная тень была равна его росту, и измерил тень пирамиды.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Высота — это перпендикуляр: самый короткий путь от вершины до противоположной стороны. Поэтому её и используют в формуле площади: $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

АНАЛОГИЯ

Высота — кошка: прыгает с вершины и падает на сторону строго под прямым углом, как капля на пол. Если сторона «закончилась», кошка падает на её продолжение, вне треугольника.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Высота дома или дерева, высота потолка, высота кровли, глубина воды в бассейне.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Высота — перпендикуляр из вершины к прямой, на которой лежит противоположная сторона.
- $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, где h — высота к стороне a .
- В тупоугольном треугольнике две высоты лежат ВНЕ его.

Пример: $a = 8$, $h = 5$. Чему равна площадь?

Решение: $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Площадь треугольника — не $a \cdot h$, а половина этого произведения. Треугольник — это половина прямоугольника.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Под каким углом высота встречает сторону?

☐ 30° ☐ 60° ☐ 90°

2. $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ при $a = 6$, $h = 4$?

☐ 24 ☐ 12 ☐ 10

3. Может ли высота лежать вне треугольника?

☐ Да, в тупоугольном ☐ Никогда ☐ Только в равнобедренном

Ответы: 1) 90°. Высота — это перпендикуляр. 2) 12. $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. 3) Да, в тупоугольном. Две высоты тупоугольного треугольника падают на продолжения сторон.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Рассказывают, что Фалес измерил пирамиду по тени, дождавшись, когда тень человека равна его росту.

Параллелограмм

Раздвижная решётка и подъёмник-«ножницы» складываются и растягиваются. Стороны те же, а площадь меняется. Почему?

ОТВЕТ

Площадь = основание × высота. Наклонили — высота стала меньше, площадь тоже.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Сложение сил

В физике есть «правило параллелограмма». Чтобы сложить две силы или скорости (например, лодки и течения реки), строят параллелограмм. Его диагональ показывает итог. Слово «параллелограмм» — от греческих «идущий рядом» и «линия».

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Евклид в «Началах» (около 300 года до н. э.) уже описал свойства параллелограмма и доказал: диагональ делит его на два равных треугольника.

АНАЛОГИЯ

Рамка из четырёх палочек на шарнирах. Нажми сбоку — рамка «валится» вбок: стороны те же, форма другая. Это и есть параллелограмм.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Раздвижные ворота и решётки, пантограф трамвая, подъёмный стол «ножницы», складные сушилки, рычаги кукольного театра.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Противоположные стороны параллельны и равны. Противоположные углы тоже равны.
- Диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
- $S = \text{основание} \times \text{высота}$ (не основание × боковая сторона).

Пример: Основание 10, высота 4, боковая сторона 5. Чему равна площадь?

Решение: $S = 10 \cdot 4 = 40$. Боковая сторона 5 здесь лишняя.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Умножить две соседние стороны ($10 \cdot 5$). Так считают площадь только у прямоугольника. Нужна высота — перпендикуляр.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Один угол параллелограмма 70° . Соседний?

☐ 70° ☐ 110° ☐ 290°

2. Диагонали параллелограмма...

☐ делятся пополам ☐ всегда равны ☐ всегда перпендикулярны

3. Площадь при основании 7 и высоте 3?

☐ 21 ☐ 10 ☐ 14

Ответы: 1) 110° . Соседние углы вместе дают 180° . 2) делятся пополам. Это главное свойство параллелограмма. 3) 21 . $7 \cdot 3 = 21$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Раздвижная решётка и подъёмник «ножницы» — это параллелограммы, у которых меняется высота.

Квадрат

Нужно удвоить площадь квадратного участка. Во сколько раз увеличить сторону? В 2? Нет! Хитрость показал ещё Сократ.

ОТВЕТ

Построй новый квадрат на диагонали старого. Его площадь ровно вдвое больше.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Урок Сократа

В диалоге Платона «Менон» Сократ учит мальчика удваивать площадь квадрата. Сначала мальчик удваивает сторону и получает площадь в 4 раза больше. Потом находит верный путь: взять диагональ как новую сторону.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

«Квадрат» — от латинского *quadratus*, «четырёхугольный». Поэтому a^2 называют «квадратом числа», а a^3 — «кубом», как объём кубика.

АНАЛОГИЯ

Плитка 1 на 1. Квадрат со стороной 3 — это 9 плиток. Со стороной 6 — 36 плиток, в 4 раза больше. Площадь растёт быстрее, чем длина.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Плитка и паркет, пиксели экрана, шахматная доска, клетки в тетради, форма окон.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- У квадрата все стороны равны и все углы прямые.
- $S = a^2$, $P = 4a$.
- Диагональ $d = a \cdot \sqrt{2}$. Диагонали равны, перпендикулярны и делятся пополам.

Пример: Сторона 5. Найди S и P .

Решение: $S = 25$, $P = 20$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Увеличили сторону в 2 раза — площадь стала больше не в 2, а в 4 раза. Сторона в 3 раза больше — площадь в 9 раз.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Площадь квадрата со стороной 7?

☐ 14 ☐ 28 ☐ 49

2. Сторону увеличили в 3 раза. Площадь выросла в...

☐ 3 раза ☐ 6 раз ☐ 9 раз

3. Периметр квадрата со стороной 6?

☐ 24 ☐ 36 ☐ 12

Ответы: 1) 49. $7 \cdot 7 = 49$. 2) 9 раз. $3^2 = 9$. 3) 24. $4 \cdot 6 = 24$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Чтобы удвоить площадь квадрата, сторону не нужно удваивать. Нужна диагональ!

Трапеция

Что общего у слов «трапеза» и «трапеция»?

ОТВЕТ

Корень один: по-гречески trapeza — стол, trapezion — «столик». Видимо, фигуру называли за сходство со столиком.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Московский папирус

В Московском математическом папирусе (около 3700 лет назад) записан верный способ найти объём усечённой пирамиды. У неё боковые грани — трапеции. Папирус хранится в Москве, в Музее изобразительных искусств имени Пушкина.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Параллельные стороны трапеции называют основаниями, а непараллельные — боковыми сторонами. Если соединить середины боковых сторон, получится средняя линия.

АНАЛОГИЯ

Ведёрко. Если разрезать его пополам, увидишь трапецию: узкое дно, широкая верхушка. Ковш, абажур и подиум устроены так же.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Ведро и ковш, насыпь дороги, мансардная крыша, сумка-трапеция, плотина, подиум в клубе.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Основания — параллельные стороны, боковые стороны не параллельны.
- Средняя линия $m = (a + b) / 2$ и параллельна основаниям.
- $S = (a + b) / 2 \cdot h$.

Пример: $a = 6$, $b = 10$, $h = 4$. Чему равна площадь?

Решение: $(6 + 10) / 2 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Основания — не обязательно «верх и низ»: если трапеция лежит на боку, они справа и слева. И высота — перпендикуляр, а не боковая сторона.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Основания 6 и 10. Средняя линия?

☐ 16 ☐ 8 ☐ 4

2. Сколько пар параллельных сторон у трапеции?

☐ Одна ☐ Две ☐ Ни одной

3. $a = 4$, $b = 8$, $h = 5$. Площадь?

☐ 30 ☐ 60 ☐ 20

Ответы: 1) 8. $(6 + 10) / 2 = 8$. 2) Одна. Только основания параллельны. 3) 30. $(4 + 8) / 2 \cdot 5 = 30$.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Слова «трапеция» и «трапеза» — родственники: по-гречески это «столик» и «стол».

Ромб

Почему знак «Главная дорога» — это жёлтый ромб, а карточная масть «бубны» — тоже ромб?

ОТВЕТ

У ромба четыре одинаковые стороны, а диагонали пересекаются под прямым углом. Такая фигура устойчиво выглядит и хорошо заметна.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ФАКТ

Ромб — это волчок

Слово «ромб» — от греческого rhombos. Так называли волчок, предмет, который вертят. Сегодня ромбы можно увидеть на дорожном знаке «Главная дорога», в сетке-рабице и в узоры на свитерах.

ОТКУДА ЭТО ВЗЯЛОСЬ

Ромб — частный случай параллелограмма: у него все стороны равны. Квадрат — частный случай ромба: у него ещё и все углы прямые.

АНАЛОГИЯ

Четыре одинаковые спички на шарнирах. Нажми — квадрат превратится в «сплюснутый» ромб, но стороны останутся равными.

ГДЕ ЭТО В ЖИЗНИ

Знак «Главная дорога», масть «бубны», сетка-рабица, узор аргайл на носках и свитерах.

ПРАВИЛО ПРОСТЫМИ СЛОВАМИ

- Все четыре стороны равны. Противоположные углы тоже равны.
- Диагонали перпендикулярны, делятся пополам и делят углы ромба пополам.
- $S = d_1 \cdot d_2 / 2$ — половина произведения диагоналей.

Пример: $d_1 = 6$, $d_2 = 8$. Найди S и сторону.

Решение: $S = 6 \cdot 8 / 2 = 24$. Половинки диагоналей 3 и 4 дают прямоугольный треугольник, сторона = 5.

ЛОВУШКА, В КОТОРУЮ ПОПАДАЮТ МНОГИЕ

Думать, что диагонали ромба равны. Так только у квадрата. И помнить: всякий квадрат — ромб, но не всякий ромб — квадрат.

ПРОВЕРЬ СЕБЯ (ОТМЕТЬ ОТВЕТ)

1. Площадь ромба с диагоналями 10 и 4?

☐ 40 ☐ 20 ☐ 14

2. Под каким углом пересекаются диагонали ромба?

☐ 45° ☐ 60° ☐ 90°

3. Всякий ли квадрат — ромб?

☐ Да ☐ Нет

Ответы: 1) 20. $10 \cdot 4 / 2 = 20$. 2) 90°. Диагонали ромба перпендикулярны. 3) Да. У квадрата все стороны равны, значит он ромб.

РАССКАЖИ ДРУГУ

Слово «ромб» по-гречески значит «волчок». А ромбов вокруг нас полно: от знаков до алмазов.